

Definimos, agora,

$$\eta = -2\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2$$

e

$$f(\eta) = (1 + \eta)^{-1/2}.$$

Claramente vemos que

$$0 \leq |\eta| \ll 1,$$

já que

$$r' \ll r$$

por hipótese. Sendo assim, consideramos a série de Taylor em torno de zero para a função f :

$$f(\eta) = 1 - \frac{1}{2}\eta + \frac{3}{8}\eta^2 + \dots$$

Vamos aproximar a função f até a segunda ordem em

$$\frac{r'}{r}.$$

Assim, η já é um polinômio dessa ordem e precisamos desprezar termos de ordens superiores em η^2 apenas, já que as outras potências mais altas de η devem ser desprezadas por conterem somente termos de ordens superiores à segunda ordem de

$$\frac{r'}{r}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \eta^2 &= \left[-2\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right]^2 \\ &= 4 \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) \right]^2 - 4\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) \left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \left(\frac{r'}{r}\right)^4 \\ &\approx 4 \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) \right]^2. \end{aligned}$$

Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[-2\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \right] + \frac{3}{2} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) \right]^2 \right\} + \dots \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} - \frac{1}{2} \frac{(r')^2}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} + \dots \end{aligned}$$

Usando

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

também podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^2 - (r')^2}{2r^3} + \dots \\ &= \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \left(\frac{r'}{r}\right)^m, \quad (1)\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 1, \\ \alpha_1 &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}', \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

De forma análoga, temos

$$\begin{aligned}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= r \sqrt{1 - 2\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2} \\ &= r \left\{ 1 - \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right) \left[-2\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^2 + \dots \right\} \\ &= r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + r \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - r \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r}\right)^2 + \dots \\ &= r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' + r' \left[\frac{1 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')^2}{2} \left(\frac{r'}{r}\right) + \dots \right].\end{aligned}$$

Assim, escrevemos

$$\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) = \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} - \frac{r'}{c} \left[\frac{1 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')^2}{2} \left(\frac{r'}{r}\right) + \dots \right]\right).$$

Nesse ponto definimos

$$t' = t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}$$

e

$$\Delta t' = -\frac{r'}{c} \left[\frac{1 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')^2}{2} \left(\frac{r'}{r}\right) + \dots \right].$$

Vemos, portanto, que $\Delta t'$ é da ordem de

$$\frac{r'}{r}.$$

e, portanto, podemos expandir a densidade de carga como uma série de potências em $\Delta t'$ como segue:

$$\begin{aligned}\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) &= \rho(\mathbf{r}', t' + \Delta t') \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Delta t')^n \frac{\partial^n}{\partial t'^n} \rho(\mathbf{r}', t').\end{aligned}$$

Notamos também que

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right)} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right)$$

e, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right)} \\ &= \frac{\partial}{\partial \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right)}, \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} = \frac{\partial \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right)}{\partial t}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) &= \rho(\mathbf{r}', t' + \Delta t') \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Delta t')^n \frac{\partial^n}{\partial t'^n} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Como as cargas estão sempre dentro da região limitada V , suas trajetórias devem ser tais que as velocidades tangenciam a fronteira de V , com componentes normais nulas exatamente sobre a fronteira. Podemos imaginar que tais trajetórias podem ser decompostas, aproximadamente, em movimentos periódicos tangentes e normais à fronteira de V . Como estamos supondo partículas não relativísticas, suas velocidades são muito menores do que c e, portanto, as frequências dos movimentos que compõem suas trajetórias devem ser tais que satisfazem

$$\omega r' \ll c.$$

Em termos de sua transformada de Fourier temporal, a densidade de carga em t' pode ser escrita como

$$\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\rho}(\mathbf{r}', \omega) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \exp\left(-i\omega \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right).$$

Portanto, para velocidades não relativísticas,

$$\exp\left(-i\omega \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) \approx 1 - i\omega \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c},$$

até ordem

$$\frac{v}{c},$$

onde v é a velocidade máxima na distribuição de cargas em movimento. Assim,

$$\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\rho}(\mathbf{r}', \omega) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \left(1 - i\omega \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) - i \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\rho}(\mathbf{r}', \omega) \omega \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \\
&= \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) - i \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\rho}(\mathbf{r}', \omega) i \frac{\partial}{\partial t} \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \\
&= \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\rho}(\mathbf{r}', \omega) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \\
&= \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right).
\end{aligned}$$

Agora, a Eq. (2) fica

$$\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Delta t')^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \right],$$

que, juntamente com a Eq. (1), fornece o integrando para o cálculo do potencial escalar:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &\approx \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \left(\frac{r'}{r}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Delta t')^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \\
&+ \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{rc} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \left(\frac{r'}{r}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Delta t')^n \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right),
\end{aligned}$$

que é válida para distribuições cujas cargas têm velocidades pequenas quando comparadas com a velocidade da luz. Para simplificar, vamos manter apenas termos até a primeira ordem em

$$\frac{r'}{r}.$$

Como $\Delta t'$ é proporcional a

$$\frac{r'^2}{r},$$

conforme calculamos acima, quando multiplicado por

$$\frac{1}{r}$$

resulta em um termo de segunda ordem em

$$\frac{r'}{r},$$

que desprezamos. Assim, as somas em n somente contribuem com o termo em que $n = 0$ e temos

$$\begin{aligned}
\frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &\approx \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \left(\frac{r'}{r}\right)^m \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \\
&+ \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{rc} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \left(\frac{r'}{r}\right)^m \frac{\partial}{\partial t} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right).
\end{aligned}$$

Na primeira soma em m , tanto o termo com $m = 0$ como o termo com $m = 1$ contribuem, mas a segunda soma somente contribui com o termo com $m = 0$ para a expansão até a primeira ordem em

$$\frac{r'}{r},$$

do quociente acima. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &\approx \frac{1}{r}\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \\ &+ \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{rc} \frac{\partial}{\partial t} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right). \end{aligned}$$

O potencial escalar pode ser escrito, finalmente, como

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \int_V d^3r' \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &\approx \frac{1}{r} \int_V d^3r' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \left[\int_V d^3r' \mathbf{r}' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \right] \\ &+ \frac{1}{rc} \hat{\mathbf{r}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r' \mathbf{r}' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \right]. \end{aligned}$$

Como as cargas estão confinadas na região V e há conservação de carga, segue que

$$\int_V d^3r' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) = Q,$$

onde Q é a carga líquida total em V . Também reconhecemos as outras integrais como sendo o dipolo elétrico da distribuição

$$\mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \int_V d^3r' \mathbf{r}' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right).$$

Logo,

$$\phi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{Q}{r} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2} + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc},$$

quando

$$r \gg V^{1/3},$$

onde

$$\dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right).$$