

Podemos ainda escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{q}{c} \hat{\mathbf{R}} \times \left[\frac{-\mathbf{a} (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) - (\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a}) \boldsymbol{\beta}}{Rc (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} - \frac{(1 - \beta^2) \mathbf{v}}{R^2 (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right] \\ &= \frac{q}{c} \hat{\mathbf{R}} \times \left[\frac{-\mathbf{a} \hat{\mathbf{R}} \cdot (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) + (\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a}) (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta})}{Rc (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} - \frac{(1 - \beta^2) \mathbf{v}}{R^2 (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right],\end{aligned}$$

onde adicionamos um termo proporcional a $\hat{\mathbf{R}}$ entre colchetes, que não contribui para $\mathbf{B}$, pois é multiplicado vetorialmente pelo $\hat{\mathbf{R}}$ que aparece fora dos colchetes. Notamos agora que

$$-\mathbf{a} \hat{\mathbf{R}} \cdot (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) + \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a} (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) = \hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}].$$

Logo,

$$\mathbf{B} = \frac{q}{c} \hat{\mathbf{R}} \times \left\{ \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]}{Rc (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} - \frac{(1 - \beta^2) \mathbf{v}}{R^2 (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}.$$

De maneira análoga, calculamos o campo elétrico e obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= q \left[\frac{(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) (1 - \beta^2)}{R^2 (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a}}{Rc^2 (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} - \frac{\mathbf{a}}{Rc^2 (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \right] \\ &= q \left[\frac{(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) (1 - \beta^2)}{R^2 (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})}{Rc^2 (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right] \\ &= q \left[\frac{(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) (1 - \beta^2)}{R^2 (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]}{Rc^2 (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}.$$

Emissão de energia por uma partícula carregada em movimento arbitrário

Vamos calcular a potência irradiada por uma partícula em movimento arbitrário. Os campos de radiação, $\mathbf{E}_{\text{rad}}$ e $\mathbf{B}_{\text{rad}}$, produzidos por uma carga q que descreve uma trajetória $\mathbf{r}_0(t)$ arbitrária são deduzidos a partir dos potenciais de Liénard & Wiechert:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = q \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]}{Rc^2 (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3}$$

e

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t),$$

onde

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_{\text{ret}}),$$

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})|}{c},$$

$$R = |\mathbf{R}|,$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{R},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}(t_{\text{ret}}) \\ &= \frac{d\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})}{dt_{\text{ret}}} \\ &= \dot{\mathbf{r}}_0(t_{\text{ret}}) \end{aligned}$$

e

$$\beta = \frac{\mathbf{v}}{c}.$$

É importante notarmos que os campos são dados para o ponto arbitrário de observação, $\mathbf{r}$, no instante arbitrário de observação, t . Nesse ponto do espaço-tempo, entretanto, a radiação que ali se encontre, necessariamente terá sido a emitida pela partícula no instante retardado t_{ret} e na posição $\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})$. O vetor de Poynting de radiação, nesse caso, fica

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \times [\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)] \\ &= \frac{c}{4\pi} \hat{\mathbf{R}} [\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)] - \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Como

$$\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

segue que

$$\mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \hat{\mathbf{R}} |\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)|^2.$$

Seja $d^2W/d\Omega$ a energia por unidade de ângulo sólido $d\Omega$ emitida pela partícula durante o intervalo de tempo dt_{ret} . Seja S a superfície esférica, centrada em $\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})$, com raio R . Dentro do ângulo sólido $d\Omega$, em torno do vetor $\mathbf{R}$, a energia d^2W leva um intervalo de tempo dt para passar através do elemento de área $R^2d\Omega$. Podemos escrever, portanto,

$$\frac{d^2W}{d\Omega dt} = R^2 \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t),$$

isto é,

$$d^2W = dt d\Omega R^2 \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t).$$

Como essa mesma quantidade de energia é a que a partícula emite em um intervalo dt_{ret} , segue que a potência emitida pela partícula, no ponto $\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})$ de sua trajetória, é dada por

$$\frac{dW}{dt_{\text{ret}}} = \int_{4\pi} d\Omega \frac{dt}{dt_{\text{ret}}} R^2 \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t),$$

onde a integral é sobre todo o ângulo sólido compreendido por S . Como

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})|}{c},$$

segue que

$$t = t_{\text{ret}} + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})|}{c}$$

e, portanto,

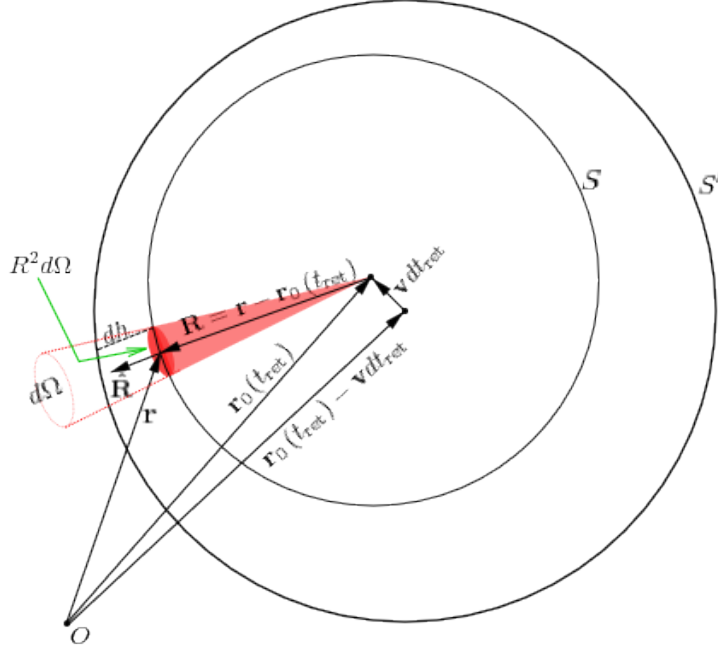
$$\begin{aligned} \frac{dt}{dt_{\text{ret}}} &= 1 - \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})|} \right] \cdot \frac{d\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})}{dt_{\text{ret}}} \\ &= 1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}. \end{aligned}$$

Com isso, vemos que a potência irradiada pela partícula é dada por

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt_{\text{ret}}} &= \frac{c}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) R^2 \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} |\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)|^2 \\ &= \frac{c}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) R^2 \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} \left| q \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]}{Rc^2 (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right|^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt_{\text{ret}}} &= \frac{q^2}{4\pi c^3} \int_{4\pi} d\Omega (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) \left| \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right|^2, \\ &= \frac{q^2}{4\pi c^3} \int_{4\pi} d\Omega \frac{|\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]|^2}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^5}. \end{aligned}$$



Outra maneira de deduzir essa mesma expressão para a potência irradiada é a seguinte. Considere que a superfície S esteja centrada no ponto $\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})$ e que o cálculo que estamos fazendo seja no instante t . Durante um intervalo de tempo dt_{ret} , antes de t_{ret} , a partícula estava em $\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}}) - \mathbf{v}(t_{\text{ret}}) dt_{\text{ret}}$. A radiação se propaga com velocidade de magnitude c . Então, no instante $t > t_{\text{ret}}$, toda a energia emitida pela partícula entre os instantes $t_{\text{ret}} - dt_{\text{ret}}$ e t_{ret} se encontra entre duas superfícies esféricas de raios $c(t - t_{\text{ret}})$ e $c(t - t_{\text{ret}} + dt_{\text{ret}})$, a primeira, S , centrada em $\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})$ e a segunda, S' , centrada em $\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}}) - \mathbf{v}(t_{\text{ret}}) dt_{\text{ret}}$. Note que a segunda superfície esférica, S' , contém a primeira, S , pois teve mais tempo para se expandir com velocidade c . Um ângulo sólido $d\Omega$, a partir de $\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})$, define, sobre S , um elemento de área de normal dada por $\hat{\mathbf{R}}$ e magnitude $R^2 d\Omega$. O elemento de volume entre esse elemento de área de S e a superfície esférica S' , de raio $c(t - t_{\text{ret}} + dt_{\text{ret}})$ e centrada em $\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}}) - \mathbf{v}(t_{\text{ret}}) dt_{\text{ret}}$, contém a energia que a partícula irradiou, durante dt_{ret} , no ângulo sólido $d\Omega$. Seja $\mathbf{r}$ o ponto de S onde calculamos a normal $\hat{\mathbf{R}}$. Então, sendo $\hat{\mathbf{R}} dh$ o vetor que vai de $\mathbf{r}$ até a superfície esférica S' , seguem as relações:

$$\begin{aligned} c(t - t_{\text{ret}}) &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})| \\ &= R \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c(t - t_{\text{ret}} + dt_{\text{ret}}) &= \left| \mathbf{r} + \hat{\mathbf{R}} dh - [\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}}) - \mathbf{v}(t_{\text{ret}}) dt_{\text{ret}}] \right| \\ &= \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_{\text{ret}}) + \hat{\mathbf{R}} dh + \mathbf{v}(t_{\text{ret}}) dt_{\text{ret}} \right| \end{aligned}$$

$$= \left| R\hat{\mathbf{R}} + dh\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{v}(t_{\text{ret}}) dt_{\text{ret}} \right|.$$

Como $R \gg dh, |\mathbf{v}(t_{\text{ret}}) dt_{\text{ret}}|$, segue que

$$\begin{aligned} \left| R\hat{\mathbf{R}} + dh\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{v}(t_{\text{ret}}) dt_{\text{ret}} \right| &= R \left| \hat{\mathbf{R}} + \frac{dh}{R}\hat{\mathbf{R}} + \frac{\mathbf{v}(t_{\text{ret}})}{R} dt_{\text{ret}} \right| \\ &\approx R \sqrt{1 + 2\frac{dh}{R} + 2\frac{\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}(t_{\text{ret}})}{R} dt_{\text{ret}}} \\ &\approx R + dh + \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}(t_{\text{ret}}) dt_{\text{ret}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$c(t - t_{\text{ret}} + dt_{\text{ret}}) \approx R + dh + \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}(t_{\text{ret}}) dt_{\text{ret}}$$

e, como $c(t - t_{\text{ret}}) = R$, vem

$$cdt_{\text{ret}} \approx dh + \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}(t_{\text{ret}}) dt_{\text{ret}},$$

isto é,

$$dh \approx c(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) dt_{\text{ret}}.$$

A densidade de energia no ponto $\mathbf{r}$ é dada por

$$u_{\text{rad}} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}} + \mathbf{B}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{B}_{\text{rad}}).$$

Como $\mathbf{B}_{\text{rad}} = \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}$, segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{B}_{\text{rad}} &= (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}) \cdot (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}) \\ &= \hat{\mathbf{R}} \cdot [\mathbf{E}_{\text{rad}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}})] \\ &= \hat{\mathbf{R}} \cdot [\hat{\mathbf{R}} (\mathbf{E}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}}) - \mathbf{E}_{\text{rad}} (\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}})] \end{aligned}$$

e, porque $\mathbf{E}_{\text{rad}}$ é ortogonal a $\hat{\mathbf{R}}$, obtemos

$$\mathbf{B}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{B}_{\text{rad}} = \mathbf{E}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}}.$$

Logo,

$$u_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}}.$$

A energia irradiada pela partícula durante o intervalo dt_{ret} e dentro do ângulo sólido $d\Omega$ é, portanto,

$$\begin{aligned} d^2W &= u_{\text{rad}} dh R^2 d\Omega \\ &= d\Omega (1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) c u_{\text{rad}} R^2 dt_{\text{ret}}. \end{aligned}$$