

Com o Lema de Gauss, vem

$$\begin{aligned}
\int_V d^3r [\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] &= \int_V d^3r \left[\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{E} E_k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \right] \\
&= \sum_{k=1}^3 \int_V d^3r \frac{\partial \mathbf{E} E_k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \int_V d^3r \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \\
&= \sum_{k=1}^3 \oint_{S(V)} da n_k \mathbf{E} E_k - \frac{1}{2} \oint_{S(V)} da \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \\
&= \oint_{S(V)} da \left(\sum_{k=1}^3 n_k E_k \right) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \oint_{S(V)} da \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \\
&= \oint_{S(V)} da \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \right],
\end{aligned}$$

onde $S(V)$ é a superfície fechada que constitui a fronteira da região V e $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal externa a $S(V)$. De forma análoga, podemos calcular:

$$\int_V d^3r [-\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] = \int_V d^3r [\mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})],$$

já que não há monopolos magnéticos, isto é,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

e, portanto

$$\int_V d^3r [-\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] = \oint_{S(V)} da \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right].$$

Agora podemos obter a integral volumétrica de $\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}/c$, pois temos todos os termos levados em conta:

$$\begin{aligned}
\int_V d^3r \left[\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right] &= \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r [\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] + \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r [-\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] \\
&\quad - \frac{1}{4\pi c} \int_V d^3r \frac{\partial \mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\partial t} \\
&= + \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} da \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \right] \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} da \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_V d^3r \mathbf{E} \times \mathbf{B},
\end{aligned}$$

já que

$$\int_V d^3r \frac{\partial \mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_V d^3r \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Voltando à equação de balanço de momentum linear,

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = \int_V d^3r \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right),$$

encontramos, finalmente,

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} da \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right] \frac{d}{dt} \int_V d^3r \left(\frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right),$$

isto é,

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V d^3r \mathbf{g} = \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} da \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right],$$

onde

$$\mathbf{g} \equiv \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

é a densidade de momentum linear do campo eletromagnético. Portanto, se definirmos o momentum linear do campo eletromagnético como

$$\mathbf{P}_c \equiv \int_V d^3r \mathbf{g},$$

então o balanço de momentum linear para o eletromagnetismo é dado por

$$\frac{d(\mathbf{P}_m + \mathbf{P}_c)}{dt} = \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} da \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right],$$

que é conservado na região V se, e somente se,

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} da \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right] = 0.$$

Caso essa quantidade não seja nula, há transferência de momentum através da superfície da região V e, portanto, podemos interpretar essa quantidade como a integral da força por unidade de área transmitida através da superfície $S(V)$. Se tomarmos uma só componente desse integrando, temos

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) E_k + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}) B_k - \frac{1}{2} n_k (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) &= \sum_{m=1}^3 n_m (E_m E_k + B_m B_k) - \frac{1}{2} n_k (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \\ &= \sum_{m=1}^3 4\pi T_{km} n_m, \end{aligned}$$

onde

$$T_{km} \equiv \frac{1}{4\pi} \left[E_k E_m + B_k B_m - \frac{1}{2} \delta_{km} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right]$$

é o chamado tensor dos estresses de Maxwell. Com isso, o balanço de momentum linear pode também ser expresso como

$$\frac{d(\mathbf{P}_m + \mathbf{P}_c)_k}{dt} = \sum_{m=1}^3 \oint_{S(V)} da T_{km} n_m.$$

Os potenciais de Liénard & Wiechert

Vou introduzir os cálculos dos potenciais de Liénard & Wiechert, escalar e vetorial, de uma partícula carregada executando um movimento com trajetória dada. Como queremos os campos causados pela partícula, utilizamos as soluções retardadas dos potenciais no calibre de Lorentz:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_{V_\infty} d^3r' \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

e

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{V_\infty} d^3r' \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Para uma carga q descrevendo uma trajetória $\mathbf{r}_0(t)$, temos

$$\rho(\mathbf{r}', t') = q\delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t'))$$

e

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}', t') = q\mathbf{v}(t')\delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')),$$

para quaisquer $\mathbf{r}'$ e t' , onde

$$\mathbf{v}(t') = \frac{d\mathbf{r}_0(t')}{dt'}.$$

Assim, o potencial escalar, por exemplo, fica

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_{V_\infty} d^3r' \frac{q\delta^{(3)}\left(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

O problema é integrarmos

$$\int_{V_\infty} d^3r' \frac{\delta^{(3)}\left(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_{V_\infty} d^3r' \frac{\mathcal{F}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

onde por clareza, definimos:

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}', t') \equiv \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')).$$

Para tal proeza, há um truque: é óbvio que a integral acima pode ser escrita como

$$\int_{V_\infty} d^3r' \frac{\delta^{(3)}\left(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} =$$

$$\begin{aligned}
& \int_{V_\infty} d^3 r' \frac{\mathcal{F}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\
& \int_{V_\infty} d^3 r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\mathcal{F}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) = \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{V_\infty} d^3 r' \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)
\end{aligned}$$

e, portanto, integrando sobre a variável $\mathbf{r}'$, obtemos

$$\int_{V_\infty} d^3 r' \frac{\delta^{(3)}\left(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}.$$

A seguir, tomamos como fixos $\mathbf{r}$ e t e introduzimos a função

$$f(t') = t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c}.$$

Portanto, temos a seguinte integral para calcular:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\delta(f(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}.$$

Usando a propriedade da função delta de Dirac dada por

$$\delta(f(t')) = \sum_k \frac{\delta(t' - t_k)}{\left|\frac{df(t')}{dt'}\right|_{t'=t_k}},$$

onde os t_k 's são os instantes de tempo em que $f(t_k) = 0$, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\delta(f(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} = \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \frac{\delta(t' - t_k)}{\left|\frac{df(t')}{dt'}\right|_{t'=t_k}}.$$

Em outras palavras, queremos os instantes de tempo t_k 's tais que

$$t_k = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_k)|}{c}.$$

Vamos ver que há pelo menos uma solução dessa equação. Para isso, consideremos a escolha das coordenadas $(\mathbf{r}, t)$ do ponto em que estamos calculando $\phi(\mathbf{r}, t)$. Então, mantemos esse evento, $(\mathbf{r}, t)$, fixo. Podemos pensar, então, que temos uma função de t_k , $f(t_k)$, definida para todos os instantes t_k , já que a partícula existe em algum ponto para todo instante de tempo. Assim, definimos

$$f(t_k) = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_k)|}{c}.$$

Essa função é contínua, pois uma partícula clássica vai sempre descrever uma trajetória contínua. Com isso, tudo o que precisamos fazer é pensar no cruzamento da reta $y = t_k$ com uma curva contínua definida para todo ponto t_k do eixo das abscissas. Inevitavelmente, vamos ter um cruzamento. Logo, sempre há uma solução para

$$t_k = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_k)|}{c}.$$

O fato é que só há um instante de tempo para essa relação valer. Para vermos isso, suponhamos que existam dois instantes, t_1 e t_2 , com $t_1 \neq t_2$, tais que

$$t_1 = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_1)|}{c}$$

e

$$t_2 = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_2)|}{c}.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $t_2 > t_1$. Logo,

$$c(t_2 - t_1) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_1)| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_2)|.$$

Mas, usando a desigualdade triangular, sabemos que, para quaisquer vetores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, segue que

$$|\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2| \leq |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2|.$$

Então, podemos também escrever que

$$|\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2| - |\mathbf{w}_2| \leq |\mathbf{w}_1|.$$

Seja, agora,

$$\mathbf{w}_3 \equiv \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

e, assim,

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3 - \mathbf{w}_2.$$

Substituindo estas duas identidades na desigualdade acima, vem:

$$|\mathbf{w}_3| - |\mathbf{w}_2| \leq |\mathbf{w}_3 - \mathbf{w}_2|.$$

Sendo assim, escolhemos

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_1)$$

e

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_2).$$

Então, da desigualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_1)| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_2)| &\leq |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_1) - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_2))| \\ &= |\mathbf{r}_0(t_2) - \mathbf{r}_0(t_1)|. \end{aligned}$$

Assim,

$$c \leq \frac{|\mathbf{r}_0(t_2) - \mathbf{r}_0(t_1)|}{t_2 - t_1},$$

implicando que a partícula deveria ir de $\mathbf{r}_0(t_1)$ até $\mathbf{r}_0(t_2)$ com uma velocidade média maior ou igual à velocidade da luz no vácuo. Como, por hipótese, estamos considerando uma partícula massiva, de massa $m > 0$, concluímos que há, no máximo, um instante de tempo em que a equação

$$t_k = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_k)|}{c}$$

vale e definimos esse instante como o tempo retardado:

$$t_R = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)|}{c}.$$

O resultado da integral acima pode ser escrito em termos do tempo retardado como

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\delta(f(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \frac{\delta(t' - t_R)}{\left| \frac{df(t')}{dt'} \right|_{t'=t_R}} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)| \left| \frac{df(t')}{dt'} \right|_{t'=t_R}}. \end{aligned}$$

Calculemos, explicitamente, a derivada temporal da função f :

$$\begin{aligned} \frac{df(t')}{dt'} &= \frac{d}{dt'} \left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{c} \frac{d|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{dt'}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{d|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{dt'} &= \frac{1}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \frac{d|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|^2}{dt'} \\ &= \frac{1}{2|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \frac{d\{[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')] \cdot [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')]\}}{dt'} \\ &= \frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \cdot \frac{d[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')]}{dt'} \\ &= -\frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \cdot \frac{d\mathbf{r}_0(t')}{dt'} \\ &= -\frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \cdot \mathbf{v}(t'). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\delta(f(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} = \frac{1}{\left| |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)| - [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)] \cdot \frac{\mathbf{v}(t_R)}{c} \right|}.$$

Como $|\mathbf{v}/c| < 1$, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\delta(f(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)| - [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)] \cdot \frac{\mathbf{v}(t_R)}{c}}$$

e os potenciais podem ser escritos como

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)| - [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)] \cdot \frac{\mathbf{v}(t_R)}{c}}$$

e, analogamente,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mathbf{v}(t_R)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)| - [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)] \cdot \mathbf{v}(t_R)},$$

onde

$$t_R = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)|}{c}.$$

Esses são os chamados potenciais de Liénard & Wiechert. Para simplificar a notação, definamos

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R),$$

$$R = |\mathbf{R}|,$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{R},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}(t_R) \\ &= \frac{d\mathbf{r}_0(t_R)}{dt_R} \\ &= \dot{\mathbf{r}}_0(t_R) \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}.$$

Com essas definições, podemos simplificar as expressões dos potenciais assim:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\boldsymbol{\beta}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}$$

e

$$t_R = t - \frac{R}{c}.$$