

## Equações do eletromagnetismo

As equações de Maxwell são constituídas pela Lei de Gauss,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

pelo fato de que não há monopolos magnéticos,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

pela Lei de Indução de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e pela Lei de Ampère & Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Essas equações são a base da teoria do campo eletromagnético. No entanto, em nossas discussões aqui, estaremos utilizando várias outras equações úteis, além das de Maxwell. Uma delas é a equação de movimento para uma partícula carregada, dada em termos da força de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

onde  $q$  é a carga da partícula,  $\mathbf{v}$  é sua velocidade e  $c$  é a magnitude da velocidade da luz no vácuo. Como a carga é sempre conservada, há também a equação da continuidade,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

que, para recordar, vamos deduzi-la. A carga total em uma região de volume  $V$  somente varia se houver fluxo de carga através da superfície  $S$  de  $V$ . Assim,

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_S da \, \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J},$$

onde o sinal de menos é necessário, pois  $\hat{\mathbf{n}}$  é, por convenção, a normal externa à superfície fechada  $S$  e a carga  $Q$  é a que está na região  $V$ . Assim, se a carga aumentar em  $V$ , é porque há corrente através de  $S$  no sentido de fora para dentro. Podemos utilizar o teorema da divergência e obter:

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_V d^3r \, \nabla \cdot \mathbf{J}.$$

Como o volume  $V$  é arbitrário e

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V d^3r \, \rho(\mathbf{r}, t) \\ &= \int_V d^3r \, \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

segue a equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0.$$

Como explicado quando discutimos transformações de calibre, o calibre ou gauge de Lorentz é dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Nesse calibre, os potenciais vetorial e escalar retardados, que sempre vamos utilizar em nossas discussões, são dados por

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

e

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

conforme deduzimos quando discutimos acima a função de Green para a equação de onda. Com essas soluções dos potenciais, os campos são obtidos destas relações:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

e

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

## A convenção de Einstein para somas

É muito comum termos várias somas iteradas em nossos cálculos em eletromagnetismo. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial E_k}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

A notação com índices que estou apresentando aqui é tal que

$$(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z),$$

para coordenadas cartesianas. Como uma notação extremamente conveniente, também podemos usar:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \equiv \partial_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \equiv \partial_2$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \equiv \partial_3.$$

Com isso, podemos escrever

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \sum_{k=1}^3 \partial_k E_k.$$

Tipicamente, nesses cálculos vetoriais, sempre que há uma soma, invariavelmente há dois fatores com o mesmo índice somado em cada termo. Sendo assim, como no exemplo acima, sempre que aparecer, por exemplo,  $\partial_k E_k$  em algum termo, também aparecerá o símbolo de soma  $\sum_{k=1}^3$ . Logo, podemos abolir esse símbolo de nossa notação, subentendendo que dois índices iguais no mesmo termo são somados de 1 a 3. Essa convenção de Einstein simplifica a notação e torna os cálculos mais rápidos por abolir símbolos desnecessários. Com essa convenção, por exemplo, podemos escrever:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial_k E_k,$$

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}_p x_p,$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_l x_l,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{x}}_p x_p \partial_k E_k \\ &= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k (x_p E_k) - \hat{\mathbf{x}}_p E_k \partial_k x_p \\ &= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k (x_p E_k) - \hat{\mathbf{x}}_p E_k \delta_{kp} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k (x_p E_k) - \hat{\mathbf{x}}_p E_p \\ &= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k (x_p E_k) - \mathbf{E} \\ &= \partial_k (\hat{\mathbf{x}}_p x_p E_k) - \mathbf{E} \\ &= \partial_k (\mathbf{r} E_k) - \mathbf{E}, \end{aligned}$$

etc. É importante notarmos também que, em cada termo, cada índice pode aparecer apenas duas vezes, para não confundirmos quais fatores devem ser somados em pares.

## A conservação de energia em eletromagnetismo

Em mecânica clássica aprendemos a utilizar o conceito de leis de conservação para obter primeiras integrais das equações de movimento. Para cada lei de conservação, podemos eliminar uma equação de movimento. Assim, em mecânica, as leis de conservação são muito importantes para diminuir o número de equações que precisamos resolver. Nem sempre podemos encontrar um número de leis de conservação igual ao de equações de movimento; nesse caso, o sistema dinâmico é dito não integrável. E em eletromagnetismo? As equações de Maxwell juntamente com a força de Lorentz também formam um sistema dinâmico, embora muito complicado, mas que pode tornar-se mais tratável se tivermos leis de conservação. Como vimos anteriormente, a equação da continuidade expressa a conservação da carga elétrica. Poderíamos ter também a energia conservada? A seguir teremos a elucidação dessa questão através da demonstração do teorema de Poynting.

As equações de Maxwell são constituídas pela Lei de Gauss,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

pelo fato de que não há monopolos magnéticos,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

pela Lei de Indução de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e pela Lei de Ampère-Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

A força de Lorentz para uma carga puntiforme  $q$  é dada por

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

onde  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade da partícula carregada. Essa força vale também para o caso não estático e, portanto, podemos considerá-la para determinar o balanço energético entre uma distribuição de matéria carregada e os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Se a matéria é caracterizada pelas densidades  $\rho$  e  $\mathbf{J}$ , então a força sobre um elemento de volume  $d^3r$  de matéria é dada por

$$d\mathbf{F} = d^3r \left( \rho \mathbf{E} + \frac{\rho}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

e, como

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v},$$

segue que

$$d\mathbf{F} = d^3r \left( \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right).$$

Neste ponto é importante enfatizarmos que  $\mathbf{v}$ , no caso contínuo, é o campo de velocidades da matéria, isto é, no ponto  $\mathbf{r}$  e instante  $t$ , temos  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ .

O trabalho que a força elétrica faz sobre a carga  $dq = \rho d^3r$  por unidade de tempo é a potência mecânica transferida dos campos para a matéria e é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F} &= \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} d^3r \\ &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3r. \end{aligned}$$

Notemos que a força magnética não executa trabalho sobre a matéria. Da Lei de Ampère & Maxwell segue que a densidade de corrente pode ser expressa em termos dos campos:

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} &= \left( \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} \\ &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})}{\partial t}.$$

Também, usando a convenção de Einstein, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= E_i (\nabla \times \mathbf{B})_i \\ &= E_i \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (E_i B_k) - B_k \varepsilon_{ijk} \partial_j E_i \\ &= -\varepsilon_{jik} \partial_j (E_i B_k) + B_k \varepsilon_{kji} \partial_j E_i \\ &= -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\end{aligned}$$

onde usamos a Lei de Indução de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Podemos também escrever

$$\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})}{\partial t}.$$

Com esses resultados, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})}{\partial t} - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})}{\partial t}\end{aligned}$$

A taxa de variação da energia cinética da matéria carregada é dada pelo trabalho, por unidade de tempo, da força de Lorentz que é exercida sobre as cargas e, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} &= \int_V d^3r \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \\ &= \int_V d^3r \left[ -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B})}{\partial t} \right] \\ &= -\frac{c}{4\pi} \int_V d^3r \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \frac{\partial (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B})}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\oint_{S(V)} da \, \hat{\mathbf{n}} \cdot \left( \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \, (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right] \\
&= -\oint_{S(V)} da \, \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S} - \frac{d}{dt} (U_e + U_m),
\end{aligned}$$

onde  $S(V)$  é a superfície fechada que constitui a fronteira da região  $V$  e definimos o vetor de Poynting como

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Aqui também reconhecemos a energia armazenada no campo elétrico,

$$U_e \equiv \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \, \mathbf{E} \cdot \mathbf{E},$$

e a energia armazenada no campo indução magnética,

$$U_m \equiv \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \, \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}.$$

Logo, o balanço de energia dentro do volume  $V$  é dado por

$$\frac{d(\mathcal{E}_c + U_e + U_m)}{dt} = -\oint_{S(V)} da \, \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}.$$

Em outras palavras, essa equação mostra que, em uma região  $V$  do espaço, a energia cinética da matéria somada com a energia total armazenada nos campos será conservada se e somente se o fluxo do vetor de Poynting sobre a fronteira da região for nulo. Essa equação é também conhecida como o Teorema de Poynting.

## A conservação de momentum linear em eletromagnetismo

Além do balanço de energia em eletromagnetismo, podemos também deduzir a lei de conservação de momentum linear. Para isso, consideramos um elemento de volume do espaço,  $d^3r$ , em que haja uma certa quantidade de carga dada por  $\rho d^3r$ . Na presença dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , essa carga sofre a ação da força de Lorentz:

$$d\mathbf{F} = d^3r \left( \rho \mathbf{E} + \frac{\rho}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right).$$

Em uma região  $V$  do espaço, portanto, a força eletromagnética total sobre a matéria é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_V &= \int_V d^3r \left( \rho \mathbf{E} + \frac{\rho}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \\
&= \int_V d^3r \left( \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right),
\end{aligned}$$

Essa força nada mais é do que a variação do momentum das cargas dentro da região  $V$ , isto é,

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = \int_V d^3r \left( \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right),$$

onde  $\mathbf{P}_m$  é o momentum linear da matéria eletricamente carregada em  $V$ . Aqui desconsideraremos a existência de matéria neutra. Podemos expressar o integrando acima apenas em termos dos campos e não das fontes  $\rho$  e  $\mathbf{J}$ . Para isso, tomamos, da Lei de Gauss,

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E}$$

e, da Lei de Ampère & Maxwell,

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Logo, o integrando aparecendo no membro direito da equação de balanço de momentum fica

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c} \left( \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Podemos usar a Lei de Indução de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

para obter

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\partial t} + c \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= -\frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Para podermos ter uma lei de balanço análoga à da energia, precisamos reposicionar o operador  $\nabla$  ou suas componentes de modo a obtermos, ao invés de uma integral volumétrica, integrais de superfície. Para ilustrar o que queremos, consideremos, primeiramente, os termos com  $\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E}$  e  $\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{E} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial E_k}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k=1}^3 \mathbf{E} \frac{\partial E_k}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{E} E_k}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^3 E_k \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{E} E_k}{\partial x_k} - \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} \end{aligned}$$

e, como demonstrarei oportunamente,

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E},$$

dando

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{E} E_k}{\partial x_k} - \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{E} E_k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}). \end{aligned}$$