$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= -\boldsymbol{\nabla}\phi_1 - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} \\
&= -\boldsymbol{\nabla}\left(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi\right) \\
&= -\boldsymbol{\nabla}\phi + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\chi\right) \\
&= -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\
&= \mathbf{E}.
\end{aligned}
$$

Logo, fica evidente que, para qualquer função $\chi(\mathbf{r}, t)$, podemos trocar os potenciais usando as chamadas transformações de calibre, Eqs. (4) e (5), e os mesmos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são obtidos com os novos potenciais. Em outras palavras, as equações de Maxwell são invariantes por transformações de calibre, Eqs. (4) e (5). Uma vez que temos os mesmos campos para qualquer escolha da função de calibre, $\chi(\mathbf{r}, t)$, podemos escolher χ de forma a fazer com que os novos potenciais satisfaçam a Eq. (1), fixando o calibre de Lorentz!

Ilustração

Vamos ilustrar essa propriedade através de um exemplo. Suponhamos que achamos potenciais ϕ' e $\mathbf{A}'$ que dão os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ satisfazendo as equações de Maxwell, porém, esses potenciais não satisfazem o calibre de Lorentz, isto é,

$$
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi'}{\partial t} \neq 0.
$$

Vamos encontrar novos potenciais, ϕ e $\mathbf{A}$, e impor que satisfaçam a Eq. (1). Com essa imposição, vamos econtrarmos a equação resultante que χ deve satisfazer. Assim, impomos que

$$
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0,
$$

isto é, usando as Eqs. (4) e (5),

$$
\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mathbf{A}' + \boldsymbol{\nabla}\chi\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) = 0,
$$

ou seja,

$$
\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}' - \frac{1}{c}\frac{\partial \phi'}{\partial t}. \tag{1}
$$

Assim, uma vez que supusemos que ϕ' e $\mathbf{A}'$, os potenciais antigos, não satisfazem a Eq. (1), segue que basta encontrarmos uma função χ satisfazendo a Eq. (1) e encontraremos um novo par de potenciais, através do uso das Eqs. (4) e (5), que satisfarão a Eq. (1) e, ao mesmo tempo, darão os mesmos campos eletromagnéticos satisfazendo as equações de Maxwell com as mesmas fontes de carga e corrente. E, além disso, no caso do calibre de Lorentz, a Eq. (1) tem o mesmo tipo que as Eqs. (4) e (5). Portanto, resolvendo uma vez a equação de onda com fonte geral, basta trocar as fontes para encontramos os respectivos potenciais e calibre ϕ, $\mathbf{A}$ e χ.

Logo, mostramos que, no calibre de Lorentz, dadas as fontes ρ e $\mathbf{J}$, tudo o que temos a fazer para encontrar os potenciais escalar e vetorial é resolver a equação diferencial

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = f(\mathbf{r},t),$$

para cada um dos pares ordenados (Ψ, f) do conjunto

$$\left\{(\phi, -4\pi\rho), \left(A_x, -\frac{4\pi}{c}J_x\right), \left(A_y, -\frac{4\pi}{c}J_y\right), \left(A_z, -\frac{4\pi}{c}J_z\right)\right\}.$$

Função de Green para a equação de onda

Anteriormente mostramos que, no calibre de Lorentz, dadas as fontes ρ e $\mathbf{J}$, tudo o que temos a fazer para encontrar os potenciais escalar e vetorial é resolver a equação diferencial

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = f(\mathbf{r},t),$$

onde o par ordenado (Ψ, f) representa um elemento qualquer do conjunto

$$\left\{(\phi, -4\pi\rho), \left(A_x, -\frac{4\pi}{c}J_x\right), \left(A_y, -\frac{4\pi}{c}J_y\right), \left(A_z, -\frac{4\pi}{c}J_z\right)\right\}.$$

Queremos encontrar, primeiramente, uma solução particular dessa equação. Para isso, utilizamos a função de Green $G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')$, que, por definição, satisfaz

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') = \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t'). \tag{2}$$

A estratégia de utilizarmos esta abordagem em termos de função de Green é a seguinte. Notemos que o efeito de cada fonte singular $\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t')$ pode ser ponderamente acumulado através da fórmula:

$$f(\mathbf{r},t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, f(\mathbf{r}',t')\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t').$$

Assim, quando multiplicarmos a Eq. (2) por $f(\mathbf{r}',t')$ e integramos sobre todo o espaço e todo o tempo, obteremos:

$$\int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \left[f(\mathbf{r}',t')\,\nabla^2 G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') - \frac{1}{c^2}f(\mathbf{r}',t')\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')\right] = \int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, f(\mathbf{r}',t')\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t'),$$

isto é,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[\int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, f(\mathbf{r}',t')\,G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')\right] = f(\mathbf{r},t),$$

ou seja, encontramos uma solução particular da equação diferencial que queremos resolver:

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, f(\mathbf{r}',t')\,G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t').$$

Podemos fazer a transformada de Fourier sobre a variável t em ambos os membros dessa equação para obter

$$\nabla^2 g\left(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t'\right) + \frac{\omega^2}{c^2} g\left(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t'\right) = \frac{\exp\left(i\omega t'\right)}{2\pi}\delta^{(3)}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right),$$

onde usamos a representação integral da função delta de Dirac, isto é,

$$\delta\left(t-t'\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \exp\left[-i\omega\left(t-t'\right)\right]$$

e definimos

$$G\left(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t'\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \exp\left(-i\omega t\right) g\left(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t'\right).$$

Como explicaremos mais adiante, ao invés de resolvermos a equação diferencial acima, vamos modificá-la:

$$\nabla^2 g_\eta\left(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t'\right) + \left(k_0 + i\eta\right)^2 g_\eta\left(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t'\right) = \frac{\exp\left(i\omega t'\right)}{2\pi}\delta^{(3)}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right),$$

onde definimos

$$k_0 = \frac{\omega}{c},$$

que assume valores positivos e negativos, como ω.