



**IFSC USP**

Instituto de Física de São Carlos

Laboratório de Física II  
Livro de Práticas



Universidade de São Paulo  
Instituto de Física de São Carlos  
Laboratório de Ensino de Física

Laboratório de Física II: livro de práticas

São Carlos  
2018

Impressa e encadernada no setor gráfico do IFSC/USP

© 2018 IFSC/USP

Todos os direitos reservados ao Instituto de Física de São Carlos

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do IFSC

Universidade de São Paulo. Instituto de Física de São Carlos. Laboratório de Ensino de Física.

Laboratório de Física II: livro de práticas / compilado por Jose F. Schneider e Eduardo Ribeiro Azevedo. São Carlos: Instituto de Física de São Carlos, 2018.

119p.

ISBN 978-85-61958-06-0

1. Física. I. Schneider, José F., comp. II. Azevedo, E. R., comp. III. Título.

CDD 530

---

## ***Agradecimentos***

Nosso trabalho de compilação, revisão e sistematização destas apostilas de Laboratório é a última contribuição aos esforços de muitos colegas do IFSC ao longo dos anos, que trabalharam no desenvolvimento das práticas e das primeiras versões das apostilas. Alguns colegas e mentores que gostaríamos especialmente de reconhecer são os professores Renê A. Carvalho, Horácio C. Panepucci, Otaciro R. Nascimento, Roberto M. Faria, Maria C. Terrile, Rosemary Sanchez, José P. Donoso, Cláudio J. Magon, Dietrich Schiel, Mariangela Tassinari, Máximo Siu Li, Antonio José da Costa Filho, Luiz Agostinho Ferreira, Valmor R. Mastelaro, Francisco G. Guimarães e Tito J. Bonagamba. A contribuição do corpo técnico do Laboratório de Ensino tem sido fundamental em muitas oportunidades para o aprimoramento das montagens experimentais, e vale reconhecer o esforço de Amauri Gentil, Antenor Fabbri Petrilli Filho, Cláudio Boense Bretas, Ércio Santoni, Jae Antonio de Castro Filho e Marcos José Semenzato. A revisão dessa edição teve a contribuição de Renato Antônio Cruz, João Renato Muniz e Fernando Fernandes Paiva, docentes colaboradores durante os anos de 2011, 2013 e 2015, respectivamente. Os compiladores também agradecem à biblioteca do IFSC pelo cuidadoso trabalho de normatização.

Como nenhuma revisão é verdadeiramente final, gostaríamos de receber os comentários, atualizações, sugestões e correções de todos aqueles que usaram esse material em suas aulas de laboratório, para assim melhorar as futuras edições destas apostilas.

*José F. Schneider*

*Eduardo R. Azevedo*



## ***Lista de Figuras***

- Figura 1.1 - Esquema de um corpo rígido em rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa (CM).  $d$ : distância entre um elemento de massa e o eixo de rotação. Observe a relação entre o sentido da rotação e o sentido dos vetores velocidade angular e momento angular (“regra da mão direita”). .....23
- Figura 1.2 - Roda de Maxwell. (a) Estado inicial em repouso. (b) Estado para um tempo  $t_b$  arbitrário de descida.....27
- Figura 1.3 - Choque rotacional entre dois discos girantes: (a) estado inicial, (b) estado final, após a colisão. ....30
- Figura 1.4 - Exemplo de conservação do momento angular na direção vertical. ....31
- Figura 1.5 - Montagem experimental para analisar a colisão rotacional de duas peças cilíndricas. ....33
- Figura 2.1 - Representação das forças que atuam sobre um corpo submerso no interior de um líquido.....40
- Figura 2.2 - Esquema de forças atuando em uma balança de tração. ....42
- Figura 2.3 - Esquema de forças atuando em uma balança de força normal.....43
- Figura 2.4 - Areômetro de Nicholson .....45
- Figura 2.5 - Utilização do Areômetro de Nicholson para a determinação da densidade de um sólido.....45
- Figura 2.6 - Utilização do Areômetro de Nicholson para a determinação da densidade de um líquido.....47
- Figura 3.1 - Função de posição  $x(t)$  para o oscilador amortecido de acordo com a equação (6). Linha tracejada: fator de modulação exponencial das amplitudes máximas de oscilação.....55
- Figura 3.2 - Amplitude de oscilação  $x_0(\Omega)$  do oscilador amortecido forçado em função da frequência de excitação  $\Omega$  da força externa, relativa a frequência natural de oscilação do oscilador livre  $\omega_0$  para diferentes valores de fator de

	amortecimento. (a) $\gamma = 0,025\omega_0$ , (b) $\gamma = 0,05\omega_0$ , (c) $\gamma = 0,12\omega_0$ , (d) $\gamma = 0,25\omega_0$ , (e) $\gamma = 0,50\omega_0$ . .....	60
Figura 3.3 -	(a) Montagem experimental de um oscilador massa-mola vertical. (b) Para experimentos de oscilação forçada, a posição do ponto de suspensão vertical da mola pode ser variada verticalmente mediante a alavanca acoplada ao disco girante com frequência $\Omega$ . .....	62
Figura 3.4 -	Oscilação da massa na água. (a) Posição de equilíbrio. (b) Posição inicial ( $t = 0$ ), com deslocamento $x_0$ com relação à posição de equilíbrio. O valor de $x_0$ corresponde à máxima amplitude durante o movimento de oscilação amortecido. (c) Posição extrema $x_1$ após a massa completar metade do período de oscilação ( $t = T/2$ ). .....	63
Figura 4.1 -	Ondas estacionárias de deslocamento em uma corda presa em ambos os extremos. $n$ : número de harmônico. N: nó (zero). AN: antinó (máximo ou mínimo). .....	69
Figura 4.2 -	Ondas estacionárias de pressão em um tubo fechado. $n$ : número de harmônico. N: nó (zero). AN: antinó (máximo ou mínimo). .....	71
Figura 4.3 -	Dispositivo para a geração de ondas estacionárias em uma corda com os extremos presos. Na imagem é mostrada a excitação do modo fundamental ( $n = 1$ ).....	73
Figura 4.4 -	Esquema do dispositivo para a geração de ondas de som estacionárias num tubo cilíndrico.....	74
Figura 5.1 -	Calorímetro. ....	84
Figura 5.2 -	Montagem experimental para medida do calor de vaporização da água.....	88
Figura 6.1 -	Diagrama P-V para o processo aplicado sobre o gás no experimento de Clément – Desormes. Entre o estado inicial (1) e o (2) o processo é adiabático e entre (2) e (3) é isocórico. ....	97
Figura 6.2 -	Experimento de Clément – Desormes. À esquerda está mostrado o esquema do dispositivo com o manômetro acoplado. À direita, a montagem experimental com a bomba manual para pressurização do gás na garrafa e o manômetro com coluna de água.....	99

---

Figura 6.3 - Montagem utilizada nas medidas do método de Ruchardt.....	102
Figura 6.4 - Representação esquemática dos três estados considerados no processo do experimento de Clément – Desormes.....	108
Figura 6.5 - Termômetro a gás a volume constante. ....	109



---

## ***Lista de Tabelas***

Tabela 2.1 -Densidades de alguns materiais.....	39
Tabela 5.1 -Calor específico de algumas substâncias e materiais.....	82
Tabela 5.2 -Calor latente de algumas transições de fase.....	83



## Sumário

<b>Introdução: por que Física?</b> .....	<b>15</b>
<b>O Laboratório de Física II</b> .....	<b>17</b>
<b>Dicas para a confecção dos relatórios</b> .....	<b>19</b>
<b>Prática 1: Rotações de corpos rígidos e conservação do momento angular</b> .....	<b>21</b>
1.1 Objetivos .....	21
1.2 Introdução .....	21
1.2.1 Movimento de translação: quantidade de movimento .....	21
1.2.2 Movimento de rotação: momento angular .....	22
1.2.3 Determinação experimental do momento de inércia de um disco (Roda de Maxwell) .....	27
1.2.4 Choques rotacionais .....	29
1.2.5 Exemplos de conservação do momento angular .....	30
1.3 Parte experimental .....	32
1.3.1 Determinação experimental do momento de inércia de um disco (Roda de Maxwell) .....	34
1.3.2 Choques rotacionais .....	34
1.3.3 Demonstrações de conservação do momento angular .....	35
1.4 Apêndice: Momentos de inércia de corpos rígidos homogêneos .....	37
<b>Prática 2: Densimetria</b> .....	<b>39</b>
2.1 Objetivos .....	39
2.2 Introdução .....	39
2.2.1 Princípio de Arquimedes: empuxo .....	40
2.2.2 Medida do volume de um sólido com uma balança .....	41
2.2.3 Medida do volume e da densidade de um sólido utilizando um Areômetro de Nicholson .....	44
2.2.4 Medida da densidade de um líquido utilizando um Areômetro de Nicholson .....	47
2.3 Parte experimental .....	48
2.3.1 Princípio de Arquimedes .....	48
2.3.2 Determinação do volume e da densidade de um sólido com uma balança .....	48
2.3.3 Determinação do volume e da densidade de um sólido utilizando um Areômetro de Nicholson .....	49
2.3.4 Determinação da densidade de um líquido utilizando o Areômetro de Nicholson .....	49
<b>Prática 3: Oscilações livres, amortecidas e forçadas</b> .....	<b>51</b>
3.1 Objetivos .....	51

3.2	Introdução.....	51
3.2.1	Oscilador harmônico vertical livre .....	51
3.2.2	Oscilador harmônico vertical amortecido .....	52
3.2.3	Oscilador harmônico vertical forçado .....	56
3.3	Parte experimental .....	61
3.3.1	Oscilação no ar.....	62
3.3.2	Oscilação na água: análise do período de oscilação.....	63
3.3.3	Oscilação na água: análise da variação de amplitude.....	64
3.3.4	Oscilação forçada no ar .....	64
3.3.5	Oscilação forçada na água.....	65
<b>Prática 4: Ondas estacionárias .....</b>		<b>67</b>
4.1	Objetivos.....	67
4.2	Introdução.....	67
4.2.1	Ondas progressivas em cordas.....	67
4.2.2	Ondas estacionárias em cordas.....	68
4.2.3	Ondas de som estacionárias.....	70
4.3	Parte experimental .....	73
4.3.1	Ondas estacionárias na corda.....	75
4.3.2	Ondas estacionárias de som: geração de harmônicos em função da frequência.....	75
4.3.3	Ondas estacionárias de som: geração de harmônicos em função do comprimento.....	76
4.4	Apêndice: Ondas estacionárias em uma corda .....	79
<b>Prática 5: Calorimetria .....</b>		<b>81</b>
5.1	Objetivos.....	81
5.2	Introdução.....	81
5.2.1	Calor específico.....	81
5.2.2	Calor latente: transições de fase.....	82
5.2.3	Medição das trocas de calor: o calorímetro .....	83
5.2.4	Determinação da capacidade térmica de um calorímetro .....	85
5.2.5	Determinação do calor específico de um sólido .....	86
5.2.6	Determinação do calor latente de condensação da água.....	87
5.3	Parte experimental .....	90
5.3.1	Determinação da capacidade térmica do calorímetro.....	90
5.3.2	Determinação do calor específico de um metal .....	90
5.3.3	Determinação do calor latente de condensação da água.....	91
<b>Prática 6: Processos térmicos em gases.....</b>		<b>93</b>
6.1	Objetivos.....	93
6.2	Introdução.....	93
6.2.1	Fator $\gamma$ do ar .....	93
6.2.2	Expansão térmica dos gases: zero absoluto .....	105
6.3	Parte experimental: fator $\gamma$ do ar .....	106
6.3.1	Método de Clément – Desormes.....	106

---

6.3.2	Método de Ruchardt.....	108
6.4	Parte experimental: zero absoluto.....	108
6.4.1	Determinação do zero absoluto utilizando um termômetro a gás.....	110
<b>Anexo 1: Incerteza em medidas diretas .....</b>		<b>113</b>
<b>Anexo 2: Propagação de incertezas.....</b>		<b>117</b>
<b>Anexo 3: Expressões para o método dos mínimos quadrados.....</b>		<b>119</b>



## ***Introdução: por que Física?***

Estudos, realizados pelos Conselhos de Engenharia, mostram que o Brasil perde US\$ 15 bilhões por ano com falhas de projetos, somente contabilizando o setor público, atribuídas à má formação básica dos profissionais. As oportunidades de crescimento futuro do país dependem criticamente da disponibilidade de engenheiros qualificados para inovar e resolver problemas de interesse estratégico. Da próxima geração de engenheiros não se espera que sejam apenas usuários treinados para aplicar soluções prontas, mas criadores de soluções nos novos cenários econômicos e tecnológicos. Cabe à USP, a maior universidade do país, a responsabilidade de formá-los com as mais altas qualificações, os quais, no futuro, assumirão a liderança nos setores produtivos de base tecnológica no Brasil.

As Ciências Exatas, abrangendo Física, Matemática e Química, constituem o fundamento dos processos, técnicas e linguagem da Engenharia. Assuntos, como, por exemplo, materiais inteligentes, modelos computacionais ou sensoriamento, fazem com que a fronteira entre Ciências e Engenharias seja cada vez mais difusa. O profissional que não possui uma base de conhecimento sólida nessas disciplinas, diminui drasticamente suas chances de compreender os problemas de sua área de atuação e de se comunicar com outros especialistas. Consequentemente, sua capacidade de resolver desafios tecnológicos e inovar fica limitada. Nesse aspecto, o IFSC busca fazer uma contribuição decisiva logo no início desse processo de formação.



---

## ***O Laboratório de Física II***

Os Laboratórios de Física têm uma missão diferente das disciplinas teóricas. Em primeiro lugar, oferecem a oportunidade de revisar e consolidar conceitos fundamentais de Física, fazendo a transposição a situações práticas concretas. Em segundo lugar, procuram desenvolver a capacidade de planejar e executar medições, processar os dados quantitativamente e apresentar os resultados de acordo com os padrões da comunidade técnica e científica. **No entanto, sua missão mais importante consiste em desenvolver a capacidade de análise crítica desses resultados, para discutir o seu significado, sua validade e extrair conclusões logicamente fundamentadas. Esse quesito requer a maior atenção do estudante, pois terá o maior peso na avaliação.**

A apostila tem a finalidade de apresentar os objetivos e métodos dos experimentos propostos, que deverão ser compreendidos antes de realizar a aula prática. A introdução teórica é apenas um guia para revisar sumariamente os conceitos físicos, imprescindíveis para entender a prática. Para uma discussão mais aprofundada, na seção de Bibliografia são indicados livros de referência. As seções de descrição da montagem experimental e dos procedimentos auxiliam na compreensão do experimento antes e durante a aula prática. As questões propostas têm a finalidade de chamar a atenção sobre aspectos fundamentais da prática, tanto da teoria como da análise dos resultados e, por isso, o estudante sempre deve tentar responde-las. As caixas de texto intituladas ***A Física e a Engenharia*** apresentam exemplos de diferentes aplicações práticas e sua conexão com os conceitos físicos discutidos nos experimentos realizados no laboratório. Finalmente, o fator mais importante,

para garantir o aproveitamento da aula prática, é a interação com o professor, os técnicos e os colegas. **Sempre discuta suas dúvidas com eles!**

## ***Dicas para a confecção dos relatórios***

Apresentaremos, a seguir, algumas sugestões de como o relatório, de um dado experimento, deverá ser elaborado. Lembre-se de que sua elaboração deverá ser pensada para que qualquer pessoa, com conhecimentos básicos de Física, possa entender seu conteúdo sem ter de recorrer a outras fontes de informação.

- a) O relatório deve ser escrito em folha de papel almaço;
- b) Indique, inicialmente, o(s) nome(s) do(s) aluno(s) que estão elaborando o relatório, a data de sua realização e o título do experimento de acordo com a apostila;
- c) **OBJETIVO(S)**: Descreva, de maneira clara e sucinta, o(s) objetivo(s) que deverão ser alcançados durante a realização do referido experimento;
- d) **MATERIAIS E MÉTODOS**: Descreva quais materiais e aparelhos foram utilizados durante a realização do experimento e como os dados experimentais foram obtidos. Essas informações devem permitir a qualquer outra pessoa repetir suas medidas sem que **seja necessária sua participação ou a consulta à apostila**.
- e) **RESULTADOS E DISCUSSÃO**: Apresente seus resultados de forma ordenada por meio de tabelas, gráficos etc. Descreva os itens apresentados na apostila e, em seguida, os resultados. Quando necessário, coloque equações no relatório e os dados utilizados nelas. **DISCUTA** seus resultados em função de outros, obtidos no mesmo

experimento, ou de valores disponíveis em tabela ou de valores esperados.

- f) **CONCLUSÕES:** Aqui deve ser apresentada uma conclusão geral do relatório: se os resultados obtidos estão de uma maneira geral, próximos ao esperado ou, se não, quais foram as causas desse desacordo. Faça uma análise do conhecimento adquirido pelo grupo durante a realização do experimento.

A forma de organizar o relatório não é rígida. Pode-se dividi-lo em tantas partes quantas forem necessárias. Se o mesmo incluir várias experiências diferentes, é preferível apresentá-las separadamente para facilitar a leitura.

---

## ***Prática 1: Rotações de corpos rígidos e conservação do momento angular***

### **1.1 Objetivos**

Nesta prática, será estudada a conservação do momento angular e a dinâmica de rotações de corpos rígidos. Será determinado, experimentalmente, o momento de inércia de uma peça com simetria cilíndrica (roda de Maxwell) e será analisada a dinâmica de colisões rotacionais plásticas.

### **1.2 Introdução**

Em Mecânica, se define como corpo rígido um sistema de massas cujas distâncias entre as mesmas são mantidas fixas durante o movimento. Os corpos rígidos de interesse prático são, geralmente, extensos e formados por uma distribuição contínua de massa. O movimento de corpos rígidos extensos é mais complicado que o movimento de uma massa pontual, pois além do movimento de translação, pode existir rotação ao redor de um ou mais eixos. A dinâmica de ambos os tipos de movimento pode ser claramente separada nos corpos rígidos.

#### **1.2.1 Movimento de translação: quantidade de movimento**

O movimento de translação do corpo rígido, de massa  $M$ , é completamente descrito fornecendo as coordenadas e a velocidade do centro de massa. De fato, pode-se assimilar a dinâmica de translação do corpo como

se toda a massa  $M$  estivesse concentrada no centro de massa. A quantidade de movimento total  $\vec{p}$  do corpo é

$$\vec{p} = M\vec{v} \quad (1)$$

em que  $\vec{v}$  é a velocidade do centro de massa. A dinâmica da translação é dada pela Segunda Lei de Newton

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2)$$

na qual  $\vec{F}_{ext}$  é a resultante da somatória de forças externas ao corpo. Quando não atuam forças externas, temos conservação da quantidade de movimento de translação do corpo rígido.

De modo análogo, as energias cinéticas de translação e potencial gravitacional do corpo rígido podem ser avaliadas simplesmente considerando, respectivamente, a velocidade e a altura  $H$  do centro de massa em relação ao nível de referência da energia potencial.

$$E_{cin} = \frac{Mv^2}{2}, E_g = Mgh \quad (3)$$

### 1.2.2 Movimento de rotação: momento angular

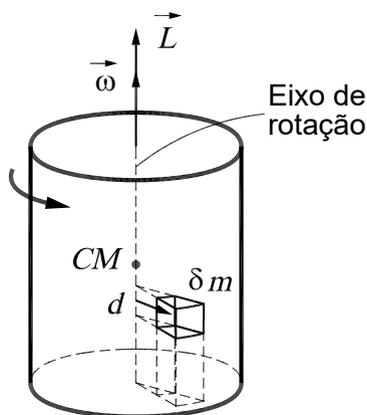
O corpo rígido pode efetuar, também, rotações, existindo energia cinética e quantidade de movimento puramente associados a esse movimento. A grandeza que representa a quantidade de movimento rotacional de um corpo rígido é o momento angular  $\vec{L}$  de rotação. Por simplicidade, suporemos que a rotação é realizada ao redor de um eixo passando pelo centro de massa do corpo, e que o corpo é simétrico ao redor desse eixo. Nessa situação, o momento angular resulta em

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (4)$$

no qual  $\vec{\omega}$  é a velocidade angular e  $I$  é o momento de inércia do corpo rígido ao longo do eixo de rotação. O momento de inércia é obtido através da soma dos produtos entre os fragmentos elementares de massa  $\delta m_i$  e o quadrado de sua distância ao longo do eixo de rotação  $d_i^2$ , como indicado na figura 1.1. A soma deve ser feita ao longo de todo o corpo.

$$I = \sum_i d_i^2 \delta m_i \quad (5)$$

Figura 1.1 - Esquema de um corpo rígido em rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa (CM).  $d$ : distância entre um elemento de massa e o eixo de rotação. Observe a relação entre o sentido da rotação e o sentido dos vetores velocidade angular e momento angular (“regra da mão direita”).



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Para um corpo extenso, de volume  $V$  e densidade  $\rho$ , a soma em (5) se expressa como uma integral ao longo dos elementos infinitesimais de volume com massa  $dm = \rho dV$ .

$$I = \int_V d^2 \rho dV \quad (6)$$

No Apêndice estão mostrados os valores calculados de  $I$  para alguns corpos homogêneos ( $\rho$  constante) de geometrias simples em rotação ao redor de eixos de simetria, como aqueles que serão analisados na prática.

### *A Física e a Engenharia Aeronáutica: helicópteros coaxiais*

Nos helicópteros convencionais, o motor exerce um torque sobre o conjunto do rotor, criando um momento angular. Reciprocamente, pela terceira Lei de Newton, o rotor exerce forças de reação sobre o motor, transmitindo, assim, um torque sobre o resto do helicóptero. Quando a aeronave está em voo, não há agentes externos capazes de compensar esse torque e, o corpo do helicóptero, tenderia a girar com momento angular oposto ao do rotor. É para suprimir esse movimento que existe o rotor estabilizador de cauda, o qual cria um torque adicional sobre a fuselagem do helicóptero, a fim de mantê-lo estável.

- Se o rotor principal gira em sentido anti-horário (visto de cima), em que sentido deve girar o rotor estabilizador? Como sua resposta depende do ângulo de ataque das asas do estabilizador?
- O rotor estabilizador mantém sempre a mesma velocidade angular durante o voo?
- O comprimento da cauda influencia no regime de rotação do estabilizador?

Os *helicópteros coaxiais* oferecem outra solução para compensar a tendência à rotação da fuselagem: dois conjuntos de rotores idênticos com velocidades angulares opostas. Dessa forma, o momento angular dos rotores é mutuamente cancelado, dispensando o uso de rotor de cauda. Uma vantagem desse desenho é a eliminação da *assimetria de sustentação*; as velocidades das pás do rotor à esquerda e à direita da aeronave são diferentes com *referência ao ar*, o que causam forças de sustentação diferentes à esquerda e à direita da aeronave.

**Questão:** Qual é a diferença de momento de inércia entre um disco fino de massa  $M$  e um cilindro longo de mesma massa?

**Questão:** Por que, de acordo com o Apêndice, um cilindro oco tem maior momento de inércia que um cilindro maciço de mesma massa e mesmo raio?

A equação que determina a dinâmica da rotação é uma consequência da Segunda Lei de Newton e resulta em

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (7)$$

na qual  $\vec{\tau}_{ext}$  é o torque resultante de cada força externa atuando sobre o corpo.

$$\vec{\tau}_{ext} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext_i} \quad (8)$$

Nessa expressão,  $\vec{r}_i$  é o vetor indicando o ponto de aplicação da força  $\vec{F}_{ext_i}$  sobre o corpo, medido em relação ao centro de massa. Quando o torque externo total é nulo, temos conservação do momento angular de rotação do corpo rígido.

**Questão:** *Pode existir uma força externa atuando sobre o corpo e não haver torque? Pode ter torque externo sem força?*

**Questão:** *Pode ocorrer que uma componente do momento angular se conserve e as outras não?*

**Questão:** *A força gravitacional atuando sobre um corpo rígido causa um torque?*

**Questão:** *A Terra possui momento angular de rotação? Ele se conserva? Qual é a consequência mais importante desse fenômeno?*

A energia cinética, associada à rotação do corpo rígido, é dada pela expressão

$$E_{rot} = \frac{I\omega^2}{2} \quad (9)$$

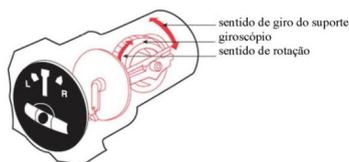
que é formalmente análoga à expressão da energia cinética de translação.

### *A Física e as Engenharias Mecatrônica, Aeronáutica e Civil: bússolas giroscópicas*

Em sistemas de navegação autônomos, utilizados em pilotos automáticos de navios, aviões, foguetes ou em robótica, é necessária uma orientação de referência. As bússolas magnéticas ou magnetômetros não são aceitáveis para essas aplicações devido à distorção do campo magnético da Terra pelas estruturas metálicas e a distribuição geográfica não regular das linhas de campo. A orientação magnética é, também, inacessível nos casos de navegação e estabilização aeroespacial, submarina, projetos de escavação em obras de engenharia civil e mineração ou em prospecção petrolífera. Uma alternativa é o uso de sistemas com giroscópios, nos quais o momento angular de uma peça girante define uma direção fixa no espaço, independente da orientação da plataforma, desde que seja minimizado o efeito dos torques externos. A bússola giroscópica, utilizada em navios e aeronaves, é capaz de indicar a direção da velocidade angular da Terra e, portanto, do norte geográfico verdadeiro. Esses sistemas possuem motores elétricos e servomecanismos para compensar os efeitos do atrito nos rolamentos de suporte.

Outra função dos giroscópios é indicar o estado de movimento rotacional de uma plataforma de navegação (aeronave, satélite ou foguete). Quando um giroscópio é rotado, existem torques exercidos sobre os suportes, que podem ser medidos e convertidos em sinais elétricos proporcionais à velocidade de rotação da plataforma. Um conjunto de três giroscópios, com momentos angulares mutuamente perpendiculares, é suficiente para determinar completamente o movimento de rotação de um sistema.

Além da navegação direcional, os giroscópios também são usados em outros dois instrumentos de navegação aeronáutica: o horizonte artificial e o indicador de giro (que fornece a direção e a intensidade da aceleração durante o giro da aeronave, mostrado na figura).



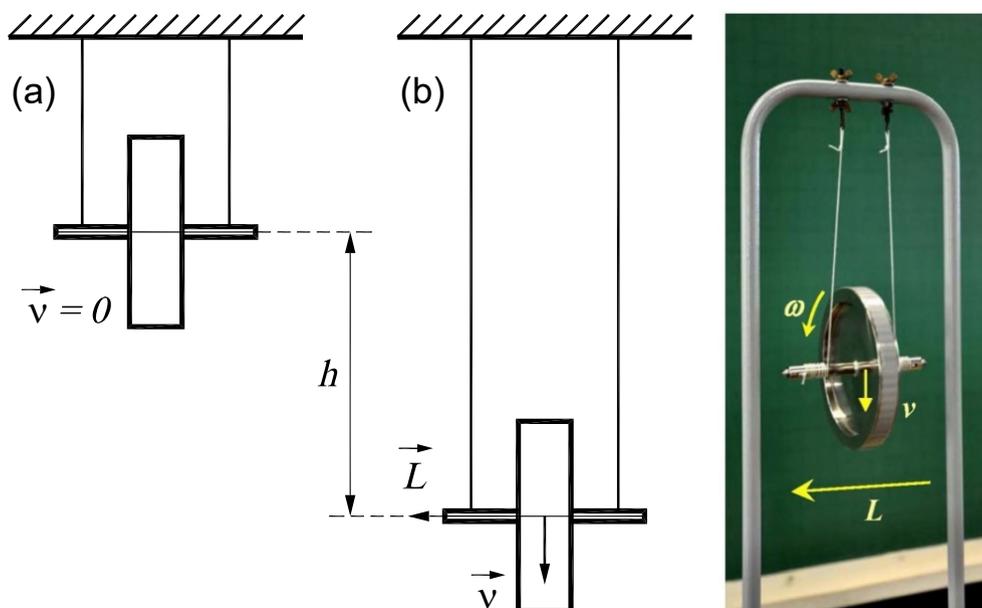
Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Atualmente, para determinar o movimento de rotação de uma plataforma, os giroscópios mecânicos foram substituídos pelos giroscópios ópticos, baseados na interferência de ondas de luz, e pelos giroscópios piezelétricos de quartzo. Nesses últimos, os braços de um diapasão de quartzo, com forma de “H”, são forçados a vibrar através da aplicação de um potencial elétrico oscilante na frequência de ressonância da peça. Quando existe um movimento de rotação ao redor do eixo do diapasão com frequência  $\Omega$ , a força de Coriolis perturba a oscilação ressonante, causando uma segunda oscilação perpendicular dos braços. O sinal piezelétrico, associado a esse movimento, é detectado nos braços inferiores do diapasão e permite determinar  $\Omega$ .

### 1.2.3 Determinação experimental do momento de inércia de um disco (Roda de Maxwell)

Nesta prática, o momento de inércia de uma peça cilíndrica complexa será medido experimentalmente utilizando o dispositivo conhecido como roda de Maxwell. O sistema, mostrado na figura 1.2, é composto de um disco de raio  $R$ , sustentado por um eixo cilíndrico de raio  $r$ , tendo o conjunto massa  $m$  e momento de inércia  $I$ . O sistema é suspenso por dois fios que permitem o eixo rodar sobre eles sem deslizar.

Figura 1.2 - Roda de Maxwell. (a) Estado inicial em repouso. (b) Estado para um tempo  $t_b$  arbitrário de descida.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Inicialmente, escolhe-se uma posição, a uma altura  $h$ , de onde a roda será solta, partindo do repouso. Essa configuração será chamada de estado inicial  $a$  e está mostrada na figura 1.2.a. Subsequentemente, a roda ganhará velocidades de translação do centro de massa  $v$  e de rotação  $\omega$ , à medida que desce rodando pelos fios. O movimento de descida da roda ocorre com aceleração constante e pode ser analisado considerando a conservação da energia mecânica total. No estado inicial  $a$ , a energia total é puramente potencial gravitacional.

$$E_a = mgh \quad (10)$$

Em uma posição arbitrária  $b$ , durante a descida, o sistema possui energia cinética de translação e de rotação (figura 1.2.b). Para simplificar, podemos considerar que a referência de energia potencial se encontra na altura do ponto  $b$ , resultando uma energia total

$$E_b = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (11)$$

Se o eixo da roda gira sem escorregar sobre os fios de suspensão, então, as velocidades de translação e de rotação estão vinculadas pela condição de rodagem.

$$\omega = \frac{v}{r} \quad (12)$$

Colocando essa condição na energia  $E_b$  e, usando a conservação da energia para vincular com (10), resulta na condição:

$$gh = \frac{v^2}{2} \left( 1 + \frac{I}{mr^2} \right) \quad (13)$$

Nessa equação, a única incógnita de tipo dinâmico é a velocidade  $v$ . Podemos determinar esse parâmetro utilizando as equações para posição e velocidade do movimento uniformemente acelerado

$$h = \frac{a}{2} t_b^2 \text{ e } v = at_b \quad (14)$$

no qual  $a$  é a aceleração do centro de massa e  $t_b$  é o tempo gasto para cair uma distância  $h$ . Combinando as equações (14), obtemos a velocidade do centro de massa

$$v = \frac{2h}{t_b} \quad (15)$$

Substituindo essa equação em (13), encontramos o valor do momento de inércia da roda

$$I = \left( \frac{gt_b^2}{2h} - 1 \right) mr^2 \quad (16)$$

Nessa expressão, o momento de inércia é função da altura  $h$ , do tempo de descida  $t_b$ , do raio de giro  $r$  sob o barbante e da massa  $m$  da roda.

#### 1.2.4 Choques rotacionais

Duas peças cilíndricas, com momentos de inércia  $I_1$  e  $I_2$ , giram com velocidades angulares  $\omega_1$  e  $\omega_2$  em torno do mesmo eixo de rotação, sem atrito, como indicado na figura 1.3.a. Em certo instante, a peça 2 cai sobre a peça 1. Devido ao atrito entre as superfícies das duas peças, o conjunto passa a girar a uma velocidade angular comum  $\omega$ , como mostrado na figura 1.3.b.

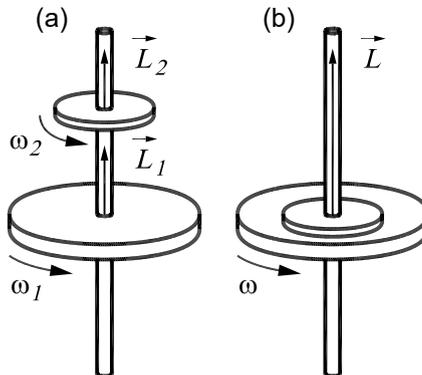
Considerando que as duas peças formam um sistema isolado de torques externos, o momento angular total é constante. Logo, podemos escrever a equação de conservação do momento angular na forma

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega \quad (17)$$

Então, a velocidade angular final adquirida pelo conjunto será

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2} \quad (18)$$

Figura 1.3 - Choque rotacional entre dois discos girantes: (a) estado inicial, (b) estado final, após a colisão.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

## 1.2.5 Exemplos de conservação do momento angular

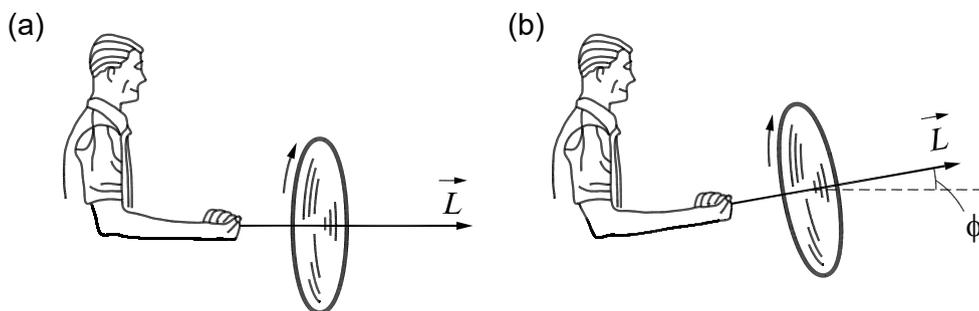
Vários são os sistemas onde a conservação do momento angular pode ser observada. A seguir, serão descritos alguns desses exemplos.

### 1.2.5.1 Roda de bicicleta

Um estudante fica sentado sobre um banco que pode girar livremente em torno do eixo vertical. Na mão, segura uma roda de bicicleta, cujo eixo é inicialmente mantido na horizontal, como mostrado na figura 1.4.a. Definimos, como sistema, o conjunto formado pelo banco giratório, estudante e a roda de bicicleta. Pode-se considerar que esse sistema está isolado de torques externos atuantes na direção vertical e, portanto, a componente vertical do momento angular total do sistema se conserva. A roda gira em torno de seu eixo com velocidade angular  $\vec{\omega}$ , mas o estudante e a plataforma estão em

repouso. O momento angular inicial total do sistema, na direção vertical, é nulo. Em seguida, o estudante inclina o eixo de rotação da roda a um ângulo  $\phi$ , em relação à horizontal, como mostrado na figura 1.4.b. Agora, passa a existir uma componente de momento angular na direção vertical, devido à rotação da roda. O momento angular do sistema é constante na direção vertical, e nesse caso igual a zero. Portanto, deve aparecer outra componente de momento que anule a componente vertical devido à roda. Assim, o banco deve começar a girar junto com a pessoa.

Figura 1.4 - Exemplo de conservação do momento angular na direção vertical.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

**Questão:** Considerando o sentido de giro da roda, mostrado na figura 1.4.a, em que sentido deveria rodar a pessoa com o banco na figura 1.4.b?

**Questão:** Existem forças externas atuando sobre o sistema (pessoa, banco e roda)? Por que se considera que não há torques atuando na direção vertical? Há torque em outras direções?

### 1.2.5.2 Momento de inércia e velocidade angular

Um estudante fica sentado sobre um banco que pode girar livremente em torno do eixo vertical. Ele segura dois pesos de massas iguais,  $m$ , um em cada mão. Inicialmente, o estudante, com os braços fechados sobre o torso, é colocado a girar em torno do eixo vertical com uma velocidade angular  $\omega_1$ . O conjunto banco, estudante e pesos forma um sistema com momento de inércia em relação ao eixo de rotação dado por  $I_1$ . De acordo com a discussão da seção anterior, o momento angular na direção vertical é constante. Em seguida, o estudante estende os braços alterando o momento de inércia do conjunto para um novo valor  $I_2$ , que será maior que  $I_1$ . Experimentalmente, observa-se que o conjunto agora roda com uma nova velocidade angular  $\omega_2$ . Como o momento angular total na vertical deve se conservar, devemos ter a condição

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad (19)$$

**Questão:** *A pessoa roda mais rápido ou mais devagar com os braços estendidos?*

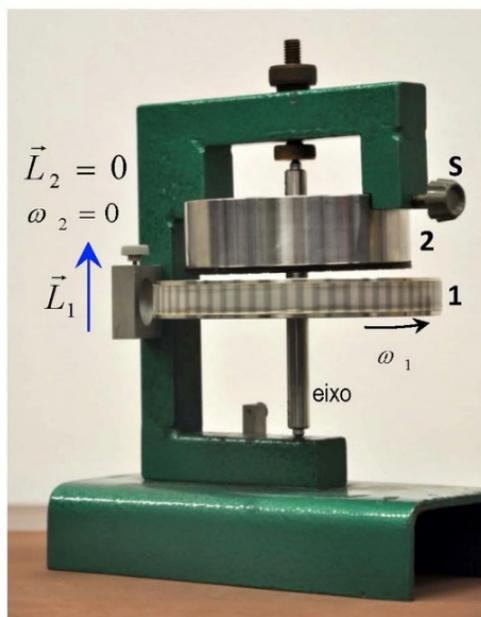
## 1.3 Parte experimental

A figura 1.2 mostra a montagem da roda de Maxwell para determinar o momento de inércia da peça suspensa, usando a equação (16). O tempo de descida  $t_b$ , desde a posição em repouso, até uma certa altura  $h$ , será registrado com um cronômetro.

Na figura 1.5 é mostrado o sistema para realizar colisões rotacionais. A peça, identificada como 1, é a mesma utilizada no experimento da roda de Maxwell. A peça pode girar ao redor do eixo vertical e é colocada em rotação,

aplicando um torque com um barbante enrolado no extremo superior do eixo. A peça, identificada como 2, na parte superior, está em repouso e é segurada mediante a porca S. Essa peça é um anel de aço com a base inferior coberta de uma camada de borracha rugosa. Afrouxando a porca S, a peça 2 cai e colide com a peça 1. As velocidades de rotação inicial e final são medidas com um tacômetro com sensor óptico, que conta as franjas na lateral da peça 1.

Figura 1.5 - Montagem experimental para analisar a colisão rotacional de duas peças cilíndricas.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

### 1.3.1 Determinação experimental do momento de inércia de um disco (Roda de Maxwell)

- a) Defina qual será a altura  $h$  entre os estados  $a$  e  $b$  da figura 1.2 e determine o tempo de descida  $t_b$ , com seu respectivo desvio padrão. Enrole os dois barbantes simetricamente para evitar oscilações durante a descida.
- b) Com os valores medidos no item anterior, calcule o valor do momento de inércia  $I$  e sua incerteza usando a equação (16).
- c) Calcule o momento de inércia do disco a partir das características geométricas de cada uma das suas partes, usando as expressões de momento de inércia mostradas no Apêndice.
- d) Compare e discuta os resultados dos itens (b) e (c).

### 1.3.2 Choques rotacionais

- a) Coloque o disco utilizado no item 1.3.1 para girar no aparato experimental mostrado na figura 1.5 e determine sua velocidade angular  $\omega_1$ . Observe cuidadosamente o comportamento de  $\omega_1$  em função do tempo. O que ocorre? Como esse comportamento afeta o experimento de colisão? É válido aplicar as equações (17) ou (18) nessas condições?
- b) Faça a colisão rotacional, soltando o disco 2, inicialmente com velocidade angular nula  $\omega_2 = 0$ .
- c) Determine a velocidade angular final  $\omega$  do conjunto.
- d) Assumindo a conservação do momento angular durante a colisão, determine o momento de inércia  $I_2$  da peça 2, a partir da equação (18).

- 
- e) Calcule o momento de inércia  $I_2$  da peça 2 a partir de suas características geométricas, usando as expressões no Apêndice.
- f) **Alternativa de análise no lugar de (d) e (e):** Caso os valores de  $I_1$  obtidos no experimento listado no item 1.3.1 estejam muito divergentes, o que poderia indicar a presença de um erro sistemático no experimento, calcule  $I_1$  da equação (18) usando o valor de  $I_2$  determinado geometricamente.
- g) Repita todo o procedimento, realizando várias colisões independentes e construa uma tabela. Calcule os valores médios dos momentos de inércia obtidos nas colisões. Seria válido calcular valores médios de  $\omega_1$  ou de  $\omega$ ?
- h) Compare os valores de momento de inércia obtidos e discuta os resultados.
- i) Calcule a variação relativa das energias cinéticas rotacionais antes e depois da colisão. Verifique se há conservação ou não da energia cinética e explique por quê.

### 1.3.3 Demonstrações de conservação do momento angular

- a) Inclua, em um apêndice do relatório, a explicação dos fenômenos físicos observados nas demonstrações utilizando a **roda de bicicleta** e o **momento de inércia variável**.
- b) Responda às questões formuladas para cada experimento e inclua diagramas colocando os vetores pertinentes (velocidade angular, momento angular, torques externos etc.).

## ***Bibliografia***

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.. **Fundamentos de Física**. Vol. 1. LTC.

Tipler, P. A., Mosca, G.. **Física para Cientistas e Engenheiros**. Vol. 1. LTC.

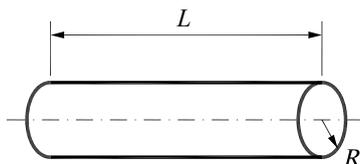
Bonagamba, T. J.; Santoni, E.; Lasso, P. R. O.; Bretas, C. B.; Gentil, A.. **Construção de um conjunto experimental destinado à execução de práticas de rotação e oscilação de corpos rígidos**. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 17, n. 2, p. 133-139, jun. 1995.

## 1.4 Apêndice: Momentos de inércia de corpos rígidos homogêneos

Eixo de rotação passando pelo centro de massa do corpo.

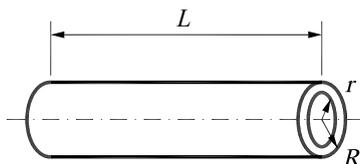
- Cilindro maciço, em relação ao eixo longitudinal:

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



- Cilindro oco, em relação ao eixo longitudinal:

$$I = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2)$$



No caso de momento de inércia para rotação ao redor de um eixo paralelo aos anteriores, mas que não passa pelo centro de massa do corpo, deve ser adicionado um termo  $MD^2$  às expressões acima, em que  $D$  é a distância entre os eixos de rotação (teorema de Steiner).



## ***Prática 2: Densimetria***

### **2.1 Objetivos**

Determinação da densidade de líquidos e sólidos utilizando o princípio de Arquimedes.

### **2.2 Introdução**

A densidade de uma substância é o quociente entre sua massa e seu volume

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1)$$

e é, geralmente, expressa em unidades do sistema CGS:  $g/cm^3$ . A tabela 2.1 traz o valor das densidades de alguns materiais.

Tabela 2.1 - Densidades de alguns materiais.

<b>Material</b>	<b><math>\rho</math> (<math>g/cm^3</math>)</b>
Alumínio	2,690
Cobre	8,930
Latão	8,560
Água	1,000
Álcool	0,789
N <sub>2</sub>	0,00125 (a 0°C e 1 atm)

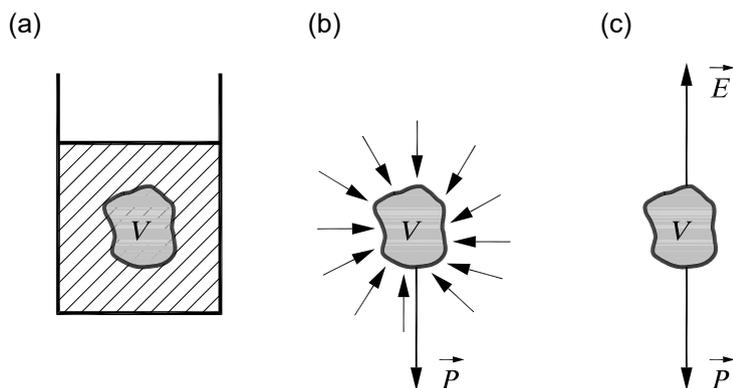
Fonte: Elaborada pelos compiladores.

### 2.2.1 Princípio de Arquimedes: empuxo

*“Um corpo mergulhado em um líquido, sofre a ação de uma força de sentido ascensional, cujo módulo é igual ao peso do volume de líquido deslocado pelo próprio corpo.”*  
(Arquimedes)

Suponhamos um líquido, com densidade  $\rho$ , em equilíbrio hidrostático no interior de um recipiente. Destaquemos uma porção dele, com volume  $V$ , como mostra a figura 2.1.a.

Figura 2.1 - Representação das forças que atuam sobre um corpo submerso no interior de um líquido.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Para que haja equilíbrio hidrostático, é necessário que a resultante de todas as forças, que atuam no volume de líquido destacado, seja nula. Uma delas é o peso  $\vec{P} = m\vec{g} = \rho V\vec{g}$ , do volume  $V$ . A outra força é a resultante  $\vec{E}$ , das forças de pressão que o resto do líquido exerce na superfície do volume  $V$

(figura 2.1.b). Ou seja,  $\vec{P} + \vec{E} = 0$ . Desse modo, a força  $\vec{E}$ , que “empurra” a porção de líquido destacada, possui magnitude igual ao peso da mesma,  $E = P = \rho Vg$ , e é denominada empuxo.

No caso do volume  $V$  estar preenchido por outro corpo com densidade  $\rho'$ , diferente daquela do líquido  $\rho$ , o empuxo não será alterado. Isto é, o empuxo  $E$  será sempre o peso do líquido de densidade  $\rho$ , deslocado pelo corpo de densidade  $\rho'$  que foi colocado em seu interior.

No caso em que  $\rho > \rho'$ , o corpo submerso no líquido irá para a superfície, já que o empuxo exercido pelo líquido será maior que o peso do corpo. Caso contrário (ou seja,  $\rho < \rho'$ ), o corpo submerso deverá ir para o fundo do recipiente que contém o líquido. Em ambos os casos, o corpo submerso no líquido não ficará em equilíbrio hidrostático.

## 2.2.2 Medida do volume de um sólido com uma balança

O volume de um sólido pode ser obtido medindo-se o empuxo sofrido por ele quando mergulhado em um líquido de densidade conhecida – normalmente água. A determinação do empuxo depende da balança utilizada.

Dois tipos de balança são comumente utilizados em laboratórios de ensino: aquelas sobre as quais atua uma força de tração e aquelas sobre as quais atua uma “força normal” (ver figuras 2.2.a e 2.3.a, em que estão indicadas as forças exercidas sobre as balanças durante a pesagem).

Observações preliminares:

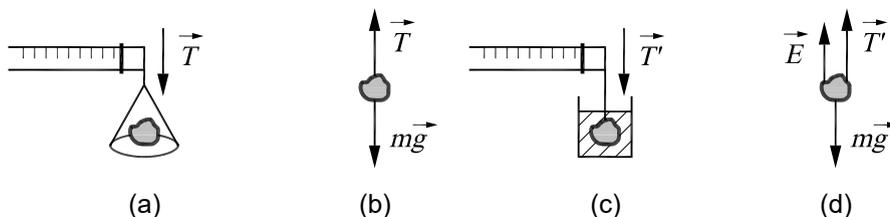
- a) Nos dois casos desprezaremos o empuxo devido ao ar.
- b) Veja as figuras 2.2 e 2.3 para compreender o significado dos símbolos usados a seguir.

- c) Lembre-se que o empuxo é dado por  $E = \rho_l V_s g$ , onde  $\rho_l$  é a densidade do líquido e  $V_s$ , o volume do sólido.
- d) Balanças são calibradas em unidades de massa, isto é, o valor indicado em uma medida representa a força exercida sobre a balança, dividida pela aceleração da gravidade.

### 2.2.2.1 Balanças que sofrem ação de “força de tração”

No caso de balanças que sofrem ação de “força de tração” (figura 2.2), o volume do sólido pode ser obtido a partir de duas medidas em condições distintas. Inicialmente, faz-se a leitura da massa real do corpo:  $m = \frac{T}{g}$  (figura 2.2.a) e, em seguida, da sua massa aparente:  $m' = \frac{T'}{g}$  (figura 2.2.c).

Figura 2.2 - Esquema de forças atuando em uma balança de tração.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A partir dos diagramas de forças do corpo livre (figura 2.2.b) e do corpo submerso (figura 2.2.d) é fácil ver que, como ele está em equilíbrio

$$E = mg - T' = mg - m'g \quad (2)$$

$$\rho_l V_s g = (m - m')g \quad (3)$$

$$V_s = \frac{m - m'}{\rho_l} \quad (4)$$

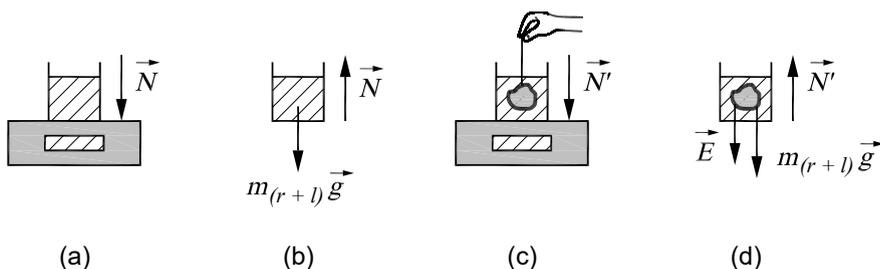
**Se o líquido for água**, cuja densidade é  $1g/cm^3$ , o volume do sólido (em  $cm^3$ ) será, simplesmente, a diferença entre as leituras da balança (em gramas) feitas com o corpo no ar e na água.

### 2.2.2.2 Balanças que sofrem ação de “força normal”

Neste caso, deve-se primeiramente determinar a massa do recipiente com o líquido que será usado para submergir o corpo (figuras 2.3.a e 2.3.b):

$$m_{(r+l)} = \frac{N}{g}$$

Figura 2.3 - Esquema de forças atuando em uma balança de força normal.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Depois, mergulha-se o corpo, cujo volume se quer determinar, segurando-o por um fio, tomando-se cuidado para que ele fique totalmente submerso, mas não encoste no fundo ou nas laterais do recipiente (figura 2.3.c). Faz-se a nova leitura na balança:  $m'_{(r+l)} = \frac{N'}{g}$ .

Através do diagrama de forças do recipiente, com o líquido na situação em que o corpo está submerso (figura 2.3.d), obtém-se:

$$E = N' - m_{(r+l)}g \quad (5)$$

$$\rho_l V_s g = (m'_{(r+l)} - m_{(r+l)})g \quad (6)$$

$$V_s = \frac{m'_{(r+l)} - m_{(r+l)}}{\rho_l} \quad (7)$$

Novamente, **se o líquido for água**, o volume do sólido será simplesmente a diferença entre as duas leituras da balança.

Note a diferença entre os dois casos analisados: no primeiro aparecem as massas do corpo e, no segundo, as massas do recipiente com o líquido.

Em algumas balanças que sofrem ação de “força normal”, pode-se *tarar* a balança com o recipiente já preenchido com o líquido. Nesse caso, **se o líquido for água**, o volume do corpo poderá ser lido diretamente na balança.

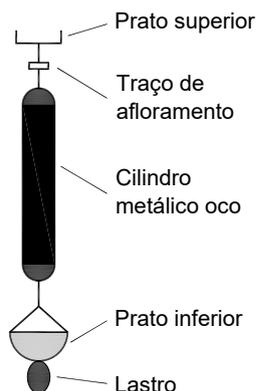
### 2.2.3 Medida do volume e da densidade de um sólido utilizando um Areômetro de Nicholson

O Areômetro<sup>1</sup> de Nicholson consiste, basicamente, em um cilindro metálico oco ao qual são adaptados dois pratos: um superior e outro inferior (figura 2.4). A haste que une o prato superior ao cilindro possui uma referência denominada “traço de afloramento”. Diz-se que ocorreu o “afloramento”<sup>2</sup> de um areômetro quando ele se encontra em equilíbrio hidrostático, submerso em um líquido, e o “traço de afloramento” coincide com a superfície do fluido.

<sup>1</sup> Areômetro: para medir densidades de líquidos ou sólidos.  
Aerômetro: para medir densidades de gases.

<sup>2</sup> Aflorar: colocar no mesmo nível.

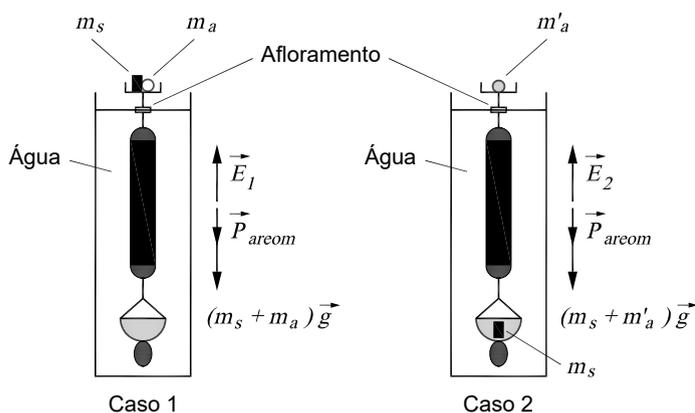
Figura 2.4 - Areômetro de Nicholson



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

O volume da estrutura do areômetro, situada abaixo do traço de afloramento, será denominado  $V_{areom}$ , enquanto que seu peso total será denominado  $P_{areom}$ .

Figura 2.5 - Utilização do Areômetro de Nicholson para a determinação da densidade de um sólido.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A medida do volume de um sólido,  $V_s$ , é feita seguindo alguns procedimentos básicos. Inicialmente, determina-se diretamente, com uma balança, a massa  $m_s$  do sólido em questão. Coloca-se, então, o corpo sólido no prato superior do areômetro e se adiciona uma massa  $m_a$  até que seu “aflorentamento” ou equilíbrio hidrostático seja obtido estando submerso em água (figura 2.5, caso 1). Para esse caso, a equação de equilíbrio hidrostático resulta em:

$$(m_s + m_a)g + P_{areom} = \rho_{\text{água}}gV_{areom} \quad (8)$$

Em seguida, remove-se do prato superior o referido sólido, e o coloca no prato inferior do areômetro. Para que o “aflorentamento” ocorra novamente, uma massa  $m'_a$  deve ser acrescentada ao prato superior (figura 2.5, caso 2). O equilíbrio, nesse caso, fornece:

$$(m_s + m'_a)g + P_{areom} = \rho_{\text{água}}g(V_{areom} + V_s) \quad (9)$$

Combinando as equações (8) e (9), obtém-se o volume e a densidade do sólido:

$$V_s = \frac{(m'_a - m_a)}{\rho_{\text{água}}} \quad (10)$$

e

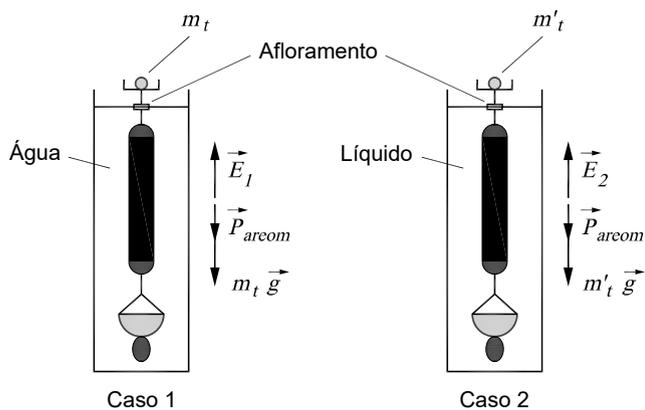
$$\rho_s = \frac{m_s}{V_s} = \frac{m_s}{(m'_a - m_a)} \rho_{\text{água}} \quad (11)$$

Em resumo, o empuxo sobre o sólido é simplesmente a diferença entre os pesos necessários para se obter aflorentamento com o mesmo no prato inferior e no superior. Quando o corpo está dentro do líquido, o empuxo sobre ele precisa ser compensado por uma massa de aflorentamento maior.

## 2.2.4 Medida da densidade de um líquido utilizando um Areômetro de Nicholson

Para a medida da densidade de um líquido  $\rho_l$  coloca-se, inicialmente, o areômetro imerso em água, e adiciona-se uma massa  $m_t$  ao prato superior até que o mesmo seja “aflorado” (figura 2.6, caso 1).

Figura 2.6 - Utilização do Areômetro de Nicholson para a determinação da densidade de um líquido.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Nessa situação, o equilíbrio hidrostático nos fornece:

$$m_t g + P_{areom} = \rho_{\text{água}} g V_{areom} \quad (12)$$

Posteriormente, coloca-se o mesmo areômetro imerso no líquido cuja densidade  $\rho_l$  se pretende determinar. Analogamente, adiciona-se uma massa  $m'_t$  ao prato superior do areômetro de maneira a obter seu “afloramento” (figura 2.6, caso 2), resultando em um equilíbrio hidrostático:

$$m'_t g + P_{areom} = \rho_l g V_{areom} \quad (13)$$

Associando as equações (12) e (13), obtém-se a densidade do líquido:

$$\rho_l = \rho_{\text{água}} - \frac{(m_t - m'_t)}{V_{\text{areom}}} \quad (14)$$

## 2.3 Parte experimental

Para a adequada realização dos experimentos utilizando o areômetro, prestem atenção às seguintes dicas:

- a) Usar um copinho para colocar as massas no prato superior do areômetro.
- b) Prender uma linha no areômetro para segurá-lo evitando, assim, que ele afunde se a massa colocada for maior do que a necessária para o afloramento.
- c) Quando estiver próximo do ponto de afloramento, dar pequenos toques no areômetro para minimizar o efeito da tensão superficial do líquido.
- d) O areômetro não deve encostar nas paredes do recipiente que o contém.

### 2.3.1 Princípio de Arquimedes

- a) Faça a verificação do Princípio de Arquimedes utilizando a montagem disponível no laboratório. Descreva esse experimento em seu relatório.

### 2.3.2 Determinação do volume e da densidade de um sólido com uma balança

- a) Meça diretamente, com uma balança, a massa  $m_s$  do sólido.

- b) Meça, com uma balança, o volume do sólido baseado nas informações descritas na apostila. Explique porque é possível, nesse caso, obter o valor do volume diretamente da balança.
- c) Calcule a densidade do sólido, compare com o valor tabelado e determine de que material é feito esse sólido.

### 2.3.3 **Determinação do volume e da densidade de um sólido utilizando um Areômetro de Nicholson**

- a) Meça diretamente, com uma balança, a massa  $m_s$  do sólido.
- b) Faça o afloramento do areômetro com o sólido no prato superior, conforme mostra a figura 2.5 (caso 1).
- c) Meça diretamente, com uma balança, a massa  $m_a$  adicionada ao prato superior.
- d) Faça o afloramento do areômetro com o sólido no prato inferior, conforme mostra a figura 2.5 (caso 2).
- e) Meça diretamente, com uma balança, a massa  $m'_a$  adicionada ao prato superior.
- f) Calcule o volume e a densidade do sólido. Compare com os valores obtidos no item 2.3.2. Discuta seus resultados.

### 2.3.4 **Determinação da densidade de um líquido utilizando o Areômetro de Nicholson**

- a) Faça o afloramento do areômetro, em água, conforme a figura 2.6 (caso 1).

- b) Aproveite esse afloramento para determinar o volume  $V_{areom}$  do areômetro utilizando a balança
- c) Meça diretamente, na balança, a massa  $m_t$  adicionada ao prato superior.
- d) Faça o afloramento do areômetro no líquido cuja densidade se pretende determinar. **Importante:** Seque bem o areômetro antes de mergulhá-lo no líquido pesquisado.
- e) Meça diretamente, na balança, a massa  $m'_t$  adicionada ao prato superior.
- f) Calcule a densidade do líquido pesquisado. Compare com o valor medido utilizando um areômetro padrão (densímetro) e com valores tabelados. A que corresponde o líquido?

## ***Bibliografia***

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.. **Fundamentos de Física**. Vol. 2. LTC.

Tipler, P. A., Mosca, G.. **Física para Cientistas e Engenheiros**. Vol. 1. LTC.

Timoner, A.; Majorana, F. S.; Hazoff, W.. **Manual de laboratório de Física: mecânica, calor e acústica**. São Paulo: Edgard Blücher, 1973.

## ***Prática 3: Oscilações livres, amortecidas e forçadas***

### **3.1 Objetivos**

Estudar o comportamento de um oscilador massa-mola vertical no que diz respeito à amplitude e frequência das oscilações, em função da viscosidade do meio (ar e água) e em condições de oscilação livre. Para oscilações forçadas por um agente externo, será estudado o fenômeno da ressonância.

### **3.2 Introdução**

Na natureza, existe uma série de fenômenos que se repetem ao longo do tempo. Esses movimentos repetitivos são muito importantes em diversas áreas da física e recebem o nome de oscilações. No nosso cotidiano, existem vários exemplos de objetos que oscilam, como, por exemplo, o pêndulo de um relógio. Qualquer objeto que se move, de alguma forma, num movimento de vai e vem em torno de uma posição central e denominado oscilador. Se esse objeto apresenta movimento harmônico de oscilação, recebe, então, o nome de oscilador harmônico.

#### **3.2.1 Oscilador harmônico vertical livre**

Consideremos, inicialmente, um sistema massa-mola oscilando verticalmente no ar, onde o atrito da massa com o meio é pequeno. Na posição de equilíbrio, a mola fica alongada, de maneira que sua força elástica compense o peso do corpo. Definimos essa posição de equilíbrio  $x_{eq}$  como a

origem do sistema de coordenadas, ou seja,  $x_{eq} = 0$ . Quando a massa é afastada do equilíbrio de uma certa distância  $x_0$ , medida com relação à  $x_{eq}$ , o sistema responderá como um oscilador harmônico convencional e a posição da massa como função do tempo é descrita por:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \quad (1)$$

com frequência angular característica  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , na qual  $k$  é a constante elástica da mola e  $m$  a massa do corpo suspenso. Essa é a frequência natural de oscilação do sistema. É importante notar que na equação (1), está assumido que em  $t = 0$  se tem  $x(0) = x_0$ , o que não representa a solução mais geral para esse movimento.

A amplitude máxima de oscilação  $x_0$  deveria ser constante ao longo do tempo e independente de  $k$  ou  $m$ . No entanto, sabemos que o atrito no meio não é exatamente nulo e, depois de algum tempo, perceberemos que as amplitudes máximas das oscilações decaem no tempo até o sistema atingir o repouso. Apesar disso, a aproximação de oscilador harmônico, sem atrito, é satisfatória para esse sistema quando o meio no qual o mesmo se encontra é o ar e as análises do movimento são feitas durante as primeiras oscilações.

### 3.2.2 Oscilador harmônico vertical amortecido

Quando o movimento da massa ocorre dentro de um meio viscoso, como a água, por exemplo, o amortecimento das oscilações é mais intenso do que no ar e a aproximação de oscilador harmônico, sem atrito, não se justifica. Para tratar esse problema, devemos incluir uma força adicional, a força de atrito viscoso que é proporcional à velocidade  $v$  do corpo, mas de sentido oposto.

$$F_a = -bv = -b \frac{dx}{dt} \quad (2)$$

O fator  $b$  é uma constante que caracteriza o grau de amortecimento. Descrevendo o movimento desde o referencial com origem na posição de equilíbrio, a equação de movimento, que resulta ao aplicar a Lei de Newton, pode ser escrita como:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} \quad (3)$$

O termo  $-kx$  representa a força de restituição da mola. Essa equação é mais complicada do que a equação do oscilador harmônico, devido à presença do termo envolvendo a primeira derivada da posição  $x$ . A solução desta equação é:

$$x(t) = x_0 e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega_1 t) \quad (4)$$

em que  $x_0$  é a amplitude máxima inicial (em  $t = 0$ ) e  $\omega_1$  é a frequência angular da oscilação, dada por:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (5)$$

O termo  $\frac{b}{2m}$  é o fator de amortecimento e será representado pela letra grega  $\gamma$ . Observe que, pela consistência dimensional da equação (5), a unidade de  $\gamma$  é radianos/segundo. Podemos reescrever a equação (4) em termos de  $\omega_1$  e  $\gamma$  como:

$$x(t) = [x_0 e^{-\gamma t}] \cos(\omega_1 t) \quad (6)$$

e, usando a definição da frequência natural  $\omega_0$ , podemos reescrever a equação (5):

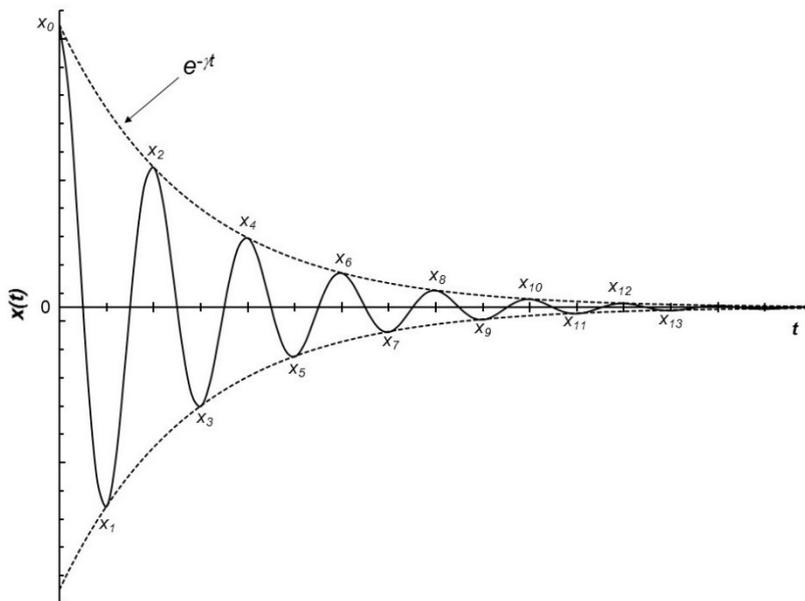
$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (7)$$

Podemos notar, pela equação (6), que a posição da massa oscila harmonicamente com frequência  $\omega_1$ , com fator de amplitude dado pelo termo entre colchetes, isto é, o produto de  $x_0$  pela função exponencial decrescente  $e^{-\gamma t}$ . Portanto, as amplitudes extremas  $x_e$  da oscilação serão progressivamente menores, com taxa de decréscimo diretamente proporcional a  $\gamma$ .

Na figura 3.1 é mostrado o gráfico da função descrita pela equação (6), indicando, em linha tracejada, o perfil da função exponencial. Podemos ver que, se o amortecimento não for muito grande, a massa realiza várias oscilações, com período  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ , antes de retornar ao repouso. Quanto maior o valor de  $\gamma$ , mais rápido é o decréscimo das amplitudes das oscilações.

A equação (7) revela uma condição crítica para o fator de amortecimento,  $\gamma_c = \omega_0$ . Nessa situação, chamada amortecimento crítico, o sistema não oscila e o retorno ao equilíbrio ocorre exponencialmente. Quando  $\gamma > \gamma_c$ , o sistema também não oscila, representando uma condição de elevado amortecimento. Entretanto, o retorno ao equilíbrio ocorre de maneira mais lenta que no caso do amortecimento crítico. Essa é a situação de amortecimento supercrítico.

Figura 3.1 - Função de posição  $x(t)$  para o oscilador amortecido de acordo com a equação (6). Linha tracejada: fator de modulação exponencial das amplitudes máximas de oscilação.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

**Questão:** De que forma o efeito do atrito perturba a frequência de oscilação?

**Questão:** A energia mecânica inicial do oscilador se conserva durante o movimento?

### ***A Física e a Engenharia Civil: ressonância em estruturas***

Toda estrutura construída (casa, prédio, ponte etc.) possui inércia (massa, momento de inércia). Ao mesmo tempo, os materiais que a compõem, apresentam elasticidade, dentro de certos limites, e dissipação da energia mecânica por atrito interno e/ou externo. Portanto, quando levemente afastada do equilíbrio, por um agente externo, a estrutura poderá retornar à sua configuração de equilíbrio realizando oscilações amortecidas.

Como todo sistema mecânico elástico, a estrutura terá frequências naturais de oscilação  $\omega_0$  correspondentes a diferentes modos de vibração. Quando a força externa oscila com o tempo, com frequência  $\Omega$ , por exemplo, devido a um movimento sísmico ou perturbação pelo vento, a estrutura acompanhará essa oscilação com uma amplitude que dependerá de  $\Omega$ . Essa amplitude será grande quando  $\Omega$  se aproximar de alguma frequência natural  $\omega_0$  (situação conhecida como condição de ressonância). Eventualmente, isso pode causar o colapso da estrutura.

A queda da ponte de *Tacoma Narrows* é um exemplo clássico desse fenômeno, cujo processo de oscilação ressonante foi iniciado pela ação de vento de intensidade moderada sobre as superfícies planas da estrutura. É importante notar que, na condição de ressonância, as amplitudes de oscilação são grandes, ainda que as forças externas sejam fracas. O importante é que a frequência de oscilação coincida com uma frequência natural do sistema.

Uma forma de retirar a energia mecânica da estrutura, quando oscila em ressonância, é colocá-la em contato com outros sistemas que absorvam essa energia e a dissipem. Isso pode ser realizado com amortecedores convencionais com fluido, ou com amortecedores de “massa sintonizada”. Esses últimos são mais utilizados por não precisarem de muita manutenção. Trata-se apenas de pêndulos massivos, cuja massa é ajustada para obter uma frequência de oscilação idêntica à frequência de ressonância da estrutura. Muitos arranha-céus e torres de comunicação de grande altura possuem um amortecedor dessa classe no topo. Um dos exemplos mais chamativos é o edifício Taipei 101, que possui um pêndulo esférico central de mais de 700 toneladas, com comprimento de suspensão de 4 andares, para minimizar a amplitude da vibração eólica da estrutura.

### **3.2.3 Oscilador harmônico vertical forçado**

Para manter qualquer sistema físico oscilando em um meio com dissipação, é necessário compensar a perda de energia através de trabalho realizado por um agente externo. No sistema massa-mola, essa condição pode ser atingida através da ação de uma força externa que varie no tempo, de modo que mantenha a amplitude de oscilação constante. Nesse caso, a oscilação é forçada.

A variação temporal da força externa mais importante de se analisar é a variação harmônica, por exemplo, cossenoidal.

$$F_{ext} = F_0 \cos(\Omega t) \quad (8)$$

na qual  $\Omega$  é a frequência angular de variação da força externa. A frequência está determinada pelo agente externo ao oscilador, como, por exemplo, a frequência de rotação de um motor. É um parâmetro independente das propriedades do oscilador, não tendo qualquer relação com as frequências angulares  $\omega_1$  e  $\omega_0$  estudadas anteriormente.  $F_0$  é a amplitude máxima da força externa. Levando em consideração essa força adicional, a segunda Lei de Newton, aplicada à massa em suspensão, fornece a seguinte equação diferencial para a posição  $x(t)$ :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\Omega t) \quad (9)$$

A solução dessa equação é dada por:

$$x(t) = [x_0(\Omega)] \cos(\Omega t + \delta) \quad (10)$$

É instrutivo comparar essa solução com as equações (1) e (6), do oscilador livre e do amortecido. A grande semelhança entre essas soluções é o termo cosseno, indicando que sempre temos oscilações harmônicas. No entanto, em (10), a frequência das oscilações é  $\Omega$ , imposta sobre o sistema pelo agente externo. Podemos dizer que a massa é forçada a “acompanhar” a oscilação da força externa, independentemente de qual for a frequência natural do oscilador. O parâmetro  $\delta$  é apenas uma constante de fase que depende de  $\Omega$ , que não será discutida nesta prática.

### *A Física e a Engenharia Elétrica: amortecimento de vibrações em linhas de potência*

Os cabos de transmissão elétrica suspensos entre torres são susceptíveis de vibrar pelo efeito do vento. Como veremos na Prática de Ondas Estacionárias, se o comprimento do cabo e a frequência de vibração satisfazem a condição de ressonância, uma onda estacionária será estabelecida no cabo. Isso é prejudicial, pois expõe o cabo a tensões mecânicas indesejadas em certos pontos. Para eliminar essas vibrações, cuja faixa de frequência pode ser estimada, é possível acoplar pêndulos que vibrem com as mesmas frequências, absorvendo, assim, a energia mecânica do cabo de forma ressonante. Esse sistema foi patenteado em 1928, por George Stockbridge, e consiste em duas massas fixadas nos extremos de um cabo curto que se suspende da linha de potência. Regulando o valor das massas, a tensão e o comprimento do cabo de união, é possível ajustar a frequência de oscilação. Esse sistema é passivo, de baixo custo, pouca manutenção e facilmente ajustável.

Amortecedor de Stockbridge



Fonte: Wikipedia<sup>1</sup>

- Qual seria a vantagem de usar esse tipo de amortecedor ao invés de simplesmente colocar mais pontos de fixação?

1 - Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Stockbridge\\_damper](https://en.wikipedia.org/wiki/Stockbridge_damper)> Acesso em 20 dez. 2015

Uma grande diferença entre a equação (10) e as equações (1) ou (6) é o fator de amplitude da oscilação  $x_0(\Omega)$ . No oscilador forçado, essa amplitude é imposta pelo agente externo e depende da frequência da força externa da seguinte forma:

$$x_0(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \quad (11)$$

Essa relação não depende do tempo, o que significa que as amplitudes  $x_0(\Omega)$  serão constantes. Analisando, em detalhe, a equação (11), observamos que deverá ocorrer um máximo para a amplitude de oscilação  $x_0$  quando o denominador desta equação corresponder a um mínimo. Essa condição ocorre quando a frequência da força externa  $\Omega$  é igual a certo valor particular  $\Omega_r$ , chamado de *frequência de ressonância*.

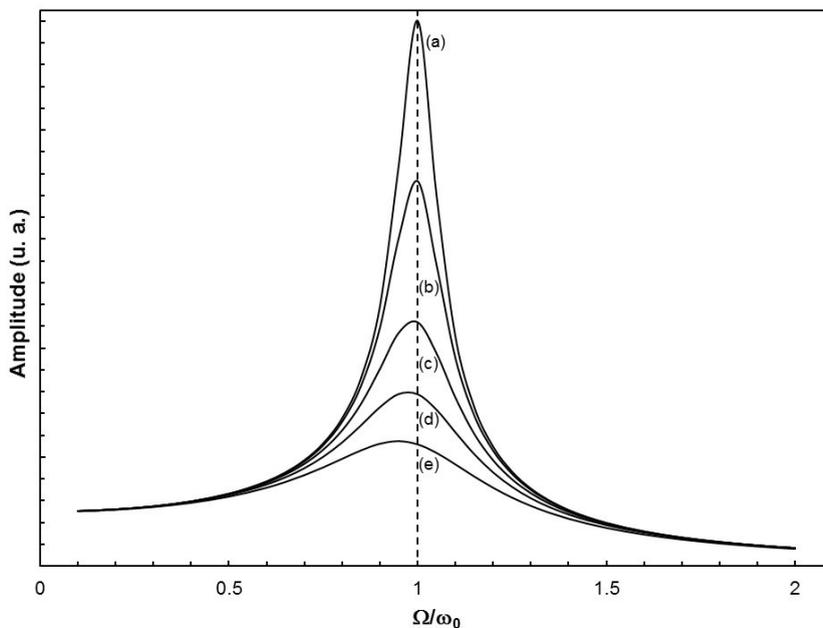
$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (12)$$

Para o caso especial de amortecimento nulo ( $\gamma = 0$ ),  $\Omega_r = \omega_0$ . Nessa situação simples,  $x_0(\Omega)$  é pequeno quando  $\Omega \neq \omega_0$  e tende a infinito quando  $\Omega = \omega_0$ . Como, na realidade, há sempre algum amortecimento ( $\gamma \neq 0$ ), a amplitude de oscilação  $x_0(\Omega)$  permanece sempre finita, embora possa se tornar muito grande quando  $\Omega = \Omega_r$ . Este fenômeno é conhecido como ressonância e a oscilação terá a maior amplitude quando a frequência da força externa coincidir com a frequência de ressonância do sistema.

Na figura 3.2 está representada a relação definida pela equação (11) como função da razão entre a frequência de excitação  $\Omega$  e a frequência natural de oscilação do oscilador livre  $\omega_0$ . As diferentes curvas correspondem a diferentes valores do fator de amortecimento. É possível observar que quanto menor o amortecimento, maior a amplitude de oscilação, especialmente para frequências próximas da ressonância  $\Omega_r$ . Observe que a posição da frequência

de ressonância muda levemente quando o coeficiente de amortecimento aumenta.

Figura 3.2 - Amplitude de oscilação  $x_0(\Omega)$  do oscilador amortecido forçado em função da frequência de excitação  $\Omega$  da força externa, relativa a frequência natural de oscilação do oscilador livre  $\omega_0$  para diferentes valores de fator de amortecimento. (a)  $\gamma = 0,025\omega_0$ , (b)  $\gamma = 0,05\omega_0$ , (c)  $\gamma = 0,12\omega_0$ , (d)  $\gamma = 0,25\omega_0$ , (e)  $\gamma = 0,50\omega_0$ .



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

**Questão:** A frequência de ressonância é igual à frequência do oscilador livre? É maior ou menor? Os valores são próximos ou não?

### ***A Física e as Engenharias Aeronáutica e de Produção Mecânica: ressonância de terra***

A estrutura de um helicóptero possui partes com resposta elástica (pneumáticos e/ou amortecedores no trem de pouso e nas asas) e, portanto, terá frequências de ressonâncias naturais. A ressonância de terra é um fenômeno destrutivo que pode ocorrer quando um helicóptero, de três ou mais pás, está pousado com o rotor em funcionamento. Se por algum motivo ocorrer um desbalanço que desalinhie o eixo de rotação da direção vertical, o helicóptero experimentará impulsos exercidos pela força de reação do chão sobre o trem de pouso. Essa excitação tem a periodicidade da rotação da hélice e constitui uma condição de oscilação forçada da estrutura do helicóptero. Se a frequência dessa excitação coincide com uma frequência natural da estrutura, o sistema oscilará com grande amplitude.

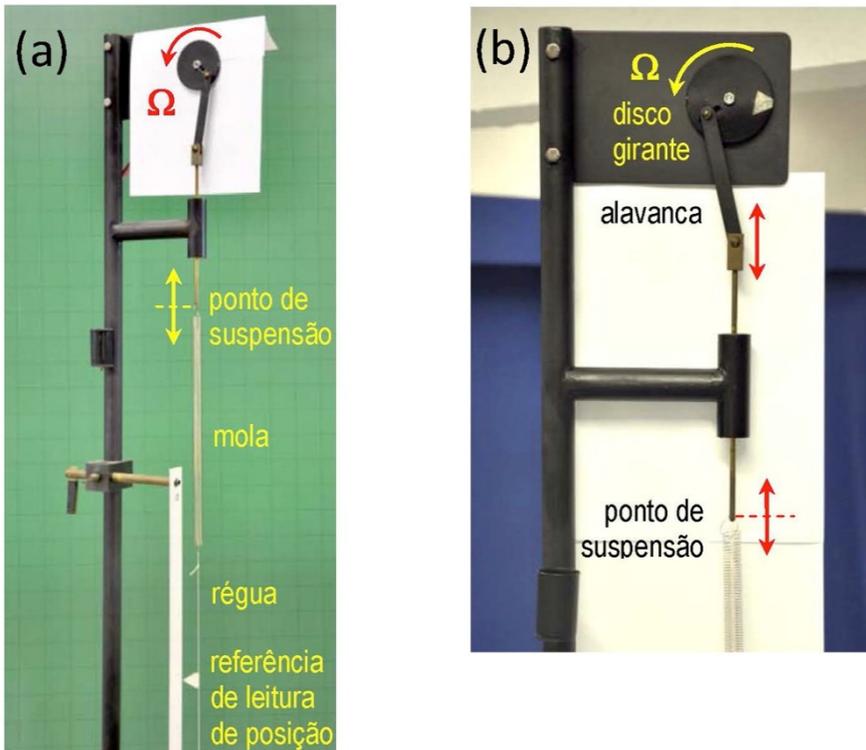
O fenômeno de ressonância de terra é um processo divergente – maiores amplitudes de oscilação causam maiores desalinhamentos e, portanto, maior intensidade dos impulsos aplicados pelo chão. O processo é capaz de destruir completamente a estrutura da aeronave em segundos. A ocorrência dessa condição pode ser neutralizada, no projeto do helicóptero, determinando a calibração apropriada dos amortecedores para dissipar a energia mecânica das vibrações e deslocar as frequências naturais para faixas que não coincidam com o regime de rotação em pouso.

Um fenômeno semelhante ocorre com a máquina de lavar roupas quando a carga fica desbalanceada – o sistema receberá impulsos periódicos do chão, com a frequência da rotação do motor. Se esses impulsos coincidem com uma frequência de vibração natural da máquina, esta vibrará com grande amplitude. É por esse fenômeno que a máquina possui um conjunto de amortecedores de molas e pesos de compensação, que devem ser projetados cuidadosamente para minimizar a amplitude de oscilação em ressonância ou afastar a frequência de ressonância da faixa de rotações do motor.

### **3.3 Parte experimental**

O oscilador massa-mola está montado verticalmente em um suporte, mostrado na figura 3.3. Para analisar o comportamento do oscilador amortecido, a massa é colocada para oscilar dentro de uma proveta com água. O oscilador pode trabalhar de modo forçado, simplesmente deslocando, periodicamente na direção vertical, o ponto de suspensão da mola. Para isso, é utilizada uma alavanca acoplada a um disco girante com velocidade angular  $\Omega$  constante, como mostrado na figura 3.3.b. A rotação é produzida por um motor elétrico, cuja frequência  $\Omega$  pode ser variada.

Figura 3.3 - (a) Montagem experimental de um oscilador massa-mola vertical. (b) Para experimentos de oscilação forçada, a posição do ponto de suspensão vertical da mola pode ser variada verticalmente mediante a alavanca acoplada ao disco girante com frequência  $\Omega$ .

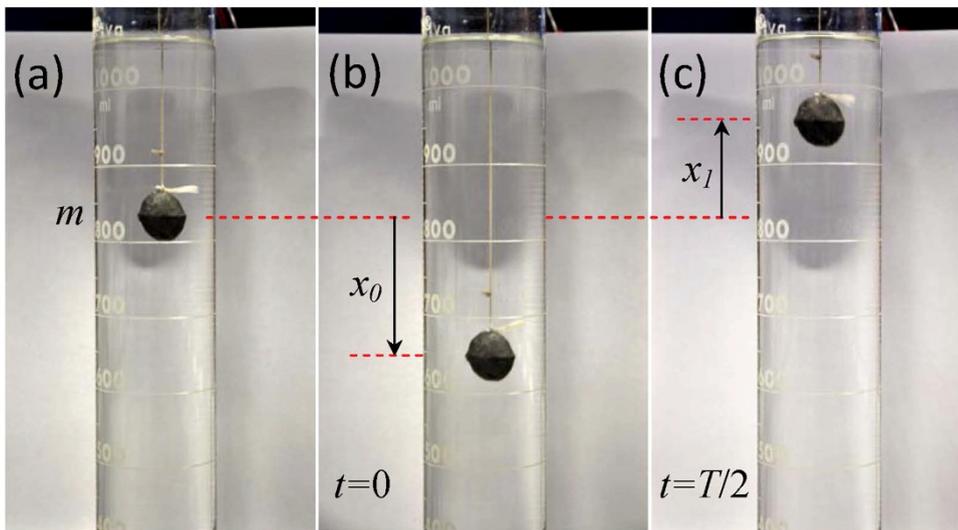


Fonte: Elaborada pelos compiladores.

### 3.3.1 Oscilação no ar

- Esta é a situação mais próxima de um oscilador livre. Utilizando o sistema massa-mola vertical, alongue a mola além da posição de equilíbrio, solte a massa e meça o período  $T_0$  de oscilação. Defina uma estratégia para diminuir a incerteza.
- Calcule frequência de oscilação  $\omega_0$  com sua incerteza.

Figura 3.4 - Oscilação da massa na água. (a) Posição de equilíbrio. (b) Posição inicial ( $t = 0$ ), com deslocamento  $x_0$  com relação à posição de equilíbrio. O valor de  $x_0$  corresponde à máxima amplitude durante o movimento de oscilação amortecido. (c) Posição extrema  $x_1$  após a massa completar metade do período de oscilação ( $t = T/2$ ).



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

### 3.3.2 Oscilação na água: análise do período de oscilação

- Utilizando o mesmo sistema massa-mola, coloque a massa dentro da proveta com água. Desloque a massa de sua posição de equilíbrio (figura 3.4) e deixe-a oscilar. Cuide para que o corpo fique sempre submerso e que não bata nas paredes da proveta durante o experimento. Meça o período  $T_1$  de oscilação com precisão.
- Calcule frequência de oscilação  $\omega_1$  com sua incerteza.
- Compare com o valor de  $\omega_0$  obtido anteriormente. Pode-se afirmar que são diferentes? Seu resultado é coerente com a equação (7)?

### 3.3.3 Oscilação na água: análise da variação de amplitude

- a) Desloque a massa de sua posição de equilíbrio até uma amplitude inicial  $x_0$ . Solte o corpo e analise a dependência das amplitudes extremas  $x_i$  de oscilação em função do tempo, tal como identificadas na figura 3.1. Para isso, registre a amplitude nos instantes  $t_i = 0, \frac{T_1}{2}, T_1, \frac{3T_1}{2}, 2T_1, \frac{5T_1}{2}, 3T_1, \dots$  onde  $T_1$  é o período de oscilação. Procure soltar a massa sempre da mesma posição inicial  $x_0$ .
- b) Construa uma tabela com os valores de  $t_i, x_i$  e os valores normalizados de amplitude  $|x_i/x_0|$ .
- c) Faça um gráfico de  $|x_i/x_0|$  versus  $t_i$ , em papel mono-log, e verifique que tipo de comportamento é observado. É consistente com a equação (6)?
- d) A partir do gráfico, determine o valor da constante de amortecimento  $\gamma$  e sua incerteza aproximada.
- e) Considerando o valor de  $\gamma$  obtido e os valores medidos para as frequências  $\omega_0$  e  $\omega_1$ , discuta se seus resultados são consistentes com a equação (7).

### 3.3.4 Oscilação forçada no ar

- a) Coloque o corpo para oscilar no ar. Ligue o motor com uma frequência de rotação  $\Omega$  baixa. Meça a amplitude máxima de oscilação  $x_0$  do corpo.
- b) Repita o processo para vários valores de frequência  $\Omega$  diferentes (pelo menos dez valores). Construa uma tabela de  $x_0$  em função de  $\Omega$ .  
**Importante:** comece com valores de frequências bem diferentes

(mínima, máxima, média, bem próxima da ressonância) e agregue valores nas regiões em que observar grandes variações da amplitude com a frequência. Quando a frequência  $\Omega$  se aproximar de  $\Omega_r$ , as amplitudes de oscilação crescerão consideravelmente. Tente se aproximar da ressonância tanto quanto for possível, para valores de  $\Omega$  acima e abaixo de  $\Omega_r$ .

- c) Faça um gráfico da amplitude máxima de oscilação  $x_0$  em função de  $\Omega$ . Determine, a partir do gráfico, o valor provável da frequência de ressonância  $\Omega_r$  e compare com a frequência do oscilador livre. Discuta a coerência do seu resultado, levando em consideração as incertezas das frequências medidas.

### 3.3.5 Oscilação forçada na água

- a) Repita o experimento descrito no item 3.3.4 com o corpo oscilando dentro da proveta com água.
- b) Faça um gráfico da amplitude máxima de oscilação  $x_0$  em função de  $\Omega$ . Determine, a partir do gráfico, o valor provável da frequência de ressonância  $\Omega_r$ .
- c) Compare os gráficos obtidos de amplitude máxima de oscilação  $x_0$  em função de  $\Omega$  para oscilação da massa no ar e na água. Discuta o efeito da variação do amortecimento sobre a forma da curva e a posição da ressonância. É consistente com a equação (12)?

## ***Bibliografia***

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.. **Fundamentos de Física**. Vol. 2. LTC.

Tipler, P. A., Mosca, G.. **Física para Cientistas e Engenheiros**. Vol. 1. LTC.

## ***Prática 4: Ondas estacionárias***

### **4.1 Objetivos**

Estudar o comportamento de ondas transversais estacionárias em cordas e em colunas de ar, e determinar a velocidade de propagação das ondas progressivas em cada um dos meios.

### **4.2 Introdução**

Uma onda é um movimento causado por uma perturbação que se propaga através de um meio. Um exemplo típico de onda é obtido quando se joga uma pedra em um lago de águas calmas. O impacto causará uma perturbação na água, fazendo com que ondas circulares se propagando pela superfície da água possam ser observadas.

Existem ondas com diferentes características, que podem ou não ser observadas a olho nu. O que elas têm em comum, entretanto, é que todas são, de fato, energia propagada através de um meio, e este meio não acompanha a propagação.

#### **4.2.1 Ondas progressivas em cordas**

Seja uma corda com densidade de massa linear  $\mu$ , mantida tensa através da aplicação de uma força constante  $F$ . Se um dos extremos da corda for pulsado periodicamente, será gerada uma onda harmônica viajando pela corda. Essa onda é dita transversal, pois a perturbação ou oscilação, no caso de ondas periódicas, é perpendicular à direção de avanço da perturbação, ou

seja, à direção de propagação. A onda se propaga com velocidade  $v$  determinada pela relação:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (1)$$

A velocidade de uma onda progressiva depende somente das propriedades do meio (tensão e densidade, no caso da corda) e não da fonte que a gera (o agente que faz o extremo da corda oscilar).

Por outro lado, a velocidade de propagação da onda progressiva pode ser calculada sabendo que uma crista percorre uma distância  $\lambda$  (comprimento da onda) durante o tempo  $T$  (período de oscilação).

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (2)$$

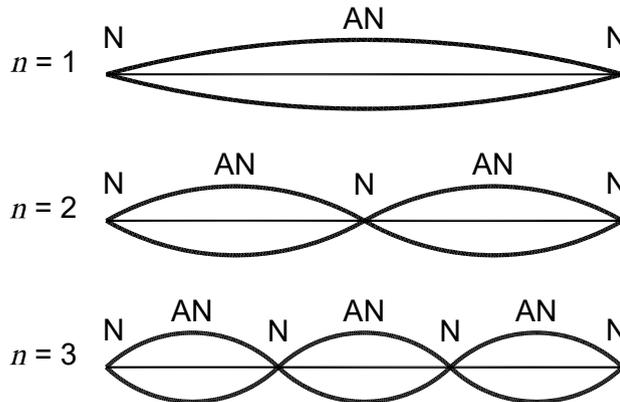
sendo  $f = \frac{1}{T}$  a frequência (medida em Hertz).

#### 4.2.2 Ondas estacionárias em cordas

Se as extremidades da corda estiverem fixas, é possível obter uma onda *estacionária* resultante da superposição de duas ondas, viajando em direções opostas: a onda gerada pela fonte desde um extremo e a onda refletida no extremo oposto fixo. A onda estacionária é uma oscilação da corda sem propagação da perturbação, ou seja, as cristas não viajam pela corda. No entanto, cada elemento da corda oscila verticalmente com frequência  $f$ .

Na figura 4.1 são mostrados os possíveis harmônicos para uma corda com extremos fixos. A curva representada é a envoltória da oscilação: a máxima deflexão da corda para cima ou para abaixo. Ao longo do tempo, cada elemento de corda oscila verticalmente entre esses extremos com frequência  $f$ .

Figura 4.1 - Ondas estacionárias de deslocamento em uma corda presa em ambos os extremos.  $n$ : número de harmônico. N: nó (zero). AN: antinó (máximo ou mínimo).



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Pelo fato dos extremos da corda corresponderem aos nós da onda estacionária, os comprimentos  $\lambda_n$  dos harmônicos estão restritos. Da figura 4.1 pode se concluir que os únicos valores possíveis de  $\lambda_n$ , numa corda de comprimento  $L$ , devem satisfazer a condição:

$$n \frac{\lambda_n}{2} = L \quad (3)$$

na qual  $n = 1, 2, 3, \dots$  é um número inteiro que identifica o harmônico gerado na corda. Como a velocidade das ondas, que se superpõem na corda, é sempre a mesma (depende unicamente do meio), então, a frequência de cada harmônico deve ser diferente para manter o produto constante em (2):

$$v = \lambda_n f_n \quad (4)$$

Deve ser notado que, em geral, um conjunto qualquer de valores de  $L$ ,  $\lambda$  e  $f$  não, necessariamente, garantem a existência uma onda estacionária, a menos que satisfaçam, simultaneamente, as equações (1) a (4).

***A Física e as Engenharias Aeronáutica e Eletrônica: câmaras anecoicas***

Uma câmara anecoica é uma sala especialmente acondicionada para evitar reflexões de ondas de som ou de rádio, com a finalidade de efetuar análises precisas de equipamentos.

- Que propriedades devem satisfazer os materiais e geometria das paredes?
- Qual poderia ser o interesse de testar componentes aeronáuticos, espaciais e de comunicação nesse tipo de instalação?

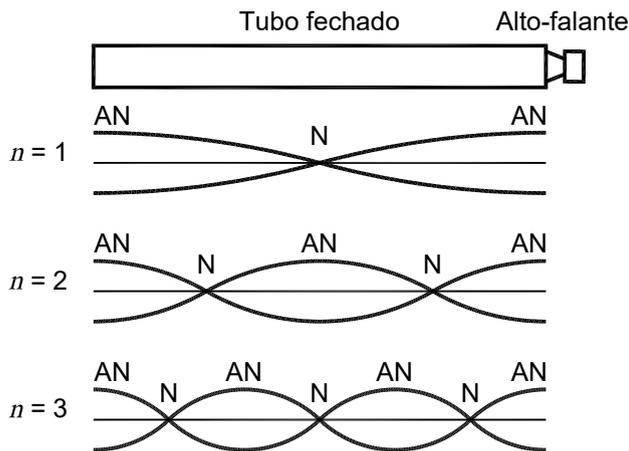
**4.2.3 Ondas de som estacionárias**

As ondas de som são perturbações da pressão se propagando através de um meio material. Nesta prática, serão estudadas ondas de som no ar. As cristas e vales das ondas correspondem, respectivamente, a lugares onde a pressão do ar é localmente máxima (compressão) ou mínima (expansão) com relação à pressão atmosférica média. As ondas de som são um tipo particular de onda longitudinal; a compressão ou expansão do meio ocorre na direção de avanço da onda.

Da mesma forma que ocorre na corda, a interferência de duas ondas sonoras, de amplitude e frequência iguais, viajando em direções opostas com velocidade  $v$ , produz uma onda estacionária. É possível criar uma onda estacionária dentro de um tubo com ar, colocando uma fonte de som em um extremo (por exemplo, um alto-falante) e deixando fechado o outro extremo (como mostrado na figura 4.2). O alto-falante gera uma onda de som harmônica viajando para esquerda, que incide na parede oposta do tubo, onde é refletida. A superposição dessa onda, refletida com a onda emitida pelo alto-falante, cria a onda estacionária dentro do tubo. Como a parede fixa impede o deslocamento das moléculas do ar, ocorre uma crista de pressão nessa região do tubo. Portanto, nesse extremo teremos sempre a crista da onda estacionária

de pressão de todos os harmônicos. No extremo oposto ocorre uma situação semelhante, pois a onda refletida incide sobre a membrana do alto-falante, comprimindo o ar e criando, assim, uma crista estacionária de pressão. É importante notar que um pequeno distanciamento do alto-falante com relação a abertura do tubo pode causar variações na posição da crista de pressão.

Figura 4.2 - Ondas estacionárias de pressão em um tubo fechado.  $n$ : número de harmônico. N: nó (zero). AN: antinó (máximo ou mínimo).



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Na figura 4.2 são representadas as envoltórias das possíveis ondas estacionárias, compatíveis com essas condições nos extremos do tubo. Observa-se, ainda, que os comprimentos de onda estão sujeitos à condição:

$$n \frac{\lambda_n}{2} = L \quad (5)$$

sendo  $n$ , número inteiro que identifica o modo de oscilação.

Se o alto-falante oscila com frequência  $f$ , a velocidade  $v$  da onda emitida deve satisfazer a equação (2). Medindo o comprimento  $\lambda_n$  da onda estacionária

e a frequência  $f$ , é possível determinar a velocidade do som. Como no caso de toda onda progressiva harmônica, a velocidade do som depende somente das propriedades do meio de propagação, sendo definida pela temperatura e a pressão.

**Questão:** Para um tubo de comprimento  $L$  fixo, determine qual é a relação entre  $f_n$  e  $n$  para ondas estacionárias no tubo fechado.

### *A Física e a Engenharia Civil: acústica de ambientes*

Existem vários fenômenos físicos que determinam o comportamento acústico de um ambiente. Um deles é a formação de ondas estacionárias de som. As paredes atuam como refletores, quase rígidos, das ondas de som incidentes. Dependendo do comprimento dessas ondas, pode ocorrer que a superposição da onda emitida pela fonte de som e a refletida por uma parede, ou entre duas ondas refletidas desde paredes opostas, produza uma onda estacionária. O fenômeno será percebido como um aumento na intensidade dos sons de certas frequências em alguns locais da sala. Esse fenômeno ressonante pode ser analisado de maneira simplificada, em uma dimensão, considerando apenas duas paredes opostas atuando como refletoras de ondas, separadas por uma distância  $L$ . Nas paredes rígidas sempre haverá um antinó (crista ou vale) da pressão. Portanto, os únicos comprimentos  $\lambda_n$  possíveis para as ondas estacionárias deverão satisfazer a condição  $L = \frac{n\lambda_n}{2}$ , na qual  $n$  é um número inteiro.

- Dadas essas condições, para quais valores de frequências  $f_n$  haverá ondas estacionárias nessa sala? Suponha uma velocidade do som de  $v = 340 \text{ m/s}$ .
- O que poderia ser feito na sala para eliminar essas ondas estacionárias?
- O sub-woofer de um sistema de som é o alto-falante de maior tamanho, capaz de produzir sons com frequências entre 20 Hz e 200 Hz. Do ponto de vista da geração de ondas estacionárias, qual seria a diferença entre colocá-lo perto de uma parede ou no meio da sala?

### 4.3 Parte experimental

O dispositivo para gerar ondas estacionárias, mostrado na figura 4.3, é composto por uma corda com uma extremidade presa a um pino, vibrando verticalmente com frequência  $f$ .

A fonte de vibração do pino é um alto-falante excitado com um sinal elétrico senoidal de frequência  $f$ , que é fornecido por um gerador de voltagem. A outra extremidade da corda está conectada, através de uma roldana, a uma massa suspensa, que define a tensão  $F$  aplicada. É possível, assim, obter ondas estacionárias na corda com comprimentos de onda dependentes da tensão  $F$  aplicada, da frequência  $f$  e do comprimento  $L$  da corda.

Figura 4.3 - Dispositivo para a geração de ondas estacionárias em uma corda com os extremos presos. Na imagem é mostrada a excitação do modo fundamental ( $n = 1$ ).



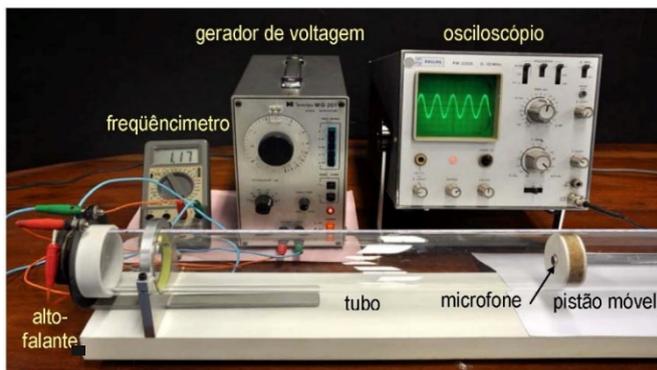
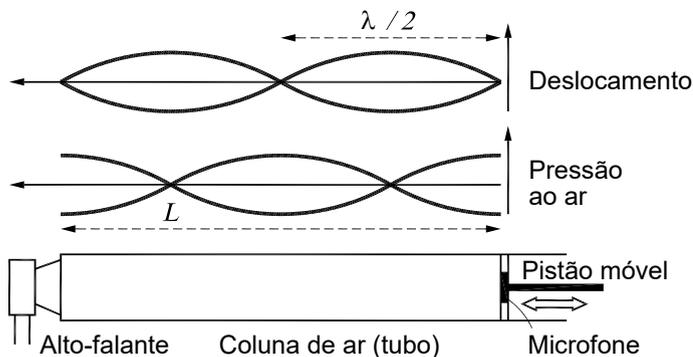
Fonte: Elaborada pelos compiladores.

O dispositivo utilizado para gerar ondas de som estacionárias está mostrado na figura 4.4. O alto-falante é excitado através de um gerador de voltagem harmônico com frequência  $f$ . No extremo oposto, o tubo está fechado com um pistão móvel acoplado a um microfone. O sinal elétrico fornecido pelo microfone, proporcional à amplitude da pressão, é monitorado por meio de um osciloscópio (medidor de voltagem em função do tempo).

Deslocando o pistão, é possível controlar o comprimento  $L$  da coluna de ar. Quando uma condição de ressonância for atingida, será registrada, pelo microfone, a maior intensidade (máxima) da voltagem oscilante devido ao aparecimento da máxima crista de pressão sobre a parede do tubo.

**Questão:** Como deve ser o sinal elétrico observado no osciloscópio? Ele representa o padrão de onda estacionária no tubo?

Figura 4.4 - Esquema do dispositivo para a geração de ondas de som estacionárias num tubo cilíndrico.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

### 4.3.1 Ondas estacionárias na corda

Nesta parte da prática, serão gerados os diferentes harmônicos na corda, partindo desde o fundamental ( $n = 1$ ), mantendo constantes  $L$  e  $F$ .

- a) Suspenda uma massa  $m$  da ordem de 200g na extremidade da corda. Faça o vibrador funcionar e varie lentamente a frequência  $f$ , partindo desde valores baixos, até observar o aparecimento de ondas estacionárias. Ajuste, cuidadosamente, a frequência até atingir a máxima amplitude de oscilação para os diversos valores de  $n$ .
- b) Construa uma tabela registrando os valores do índice  $n$  do harmônico, o número de nós,  $\lambda_n$  e  $f_n$ . Determine a velocidade das ondas para cada harmônico e verifique se a mesma é constante. Do seu conjunto de dados, determine o valor de  $v$  com sua incerteza.
- c) Usando a velocidade medida, determine o valor de  $\mu$ . O valor obtido é consistente com a corda utilizada?

### 4.3.2 Ondas estacionárias de som: geração de harmônicos em função da frequência

Este experimento é análogo ao da parte 4.3.1, porém com ondas de som. Serão gerados os diferentes harmônicos no tubo, partindo desde o modo fundamental ( $n = 1$ ), para  $L$  fixo.

- a) Conecte a bateria do microfone e ligue o gerador de ondas. Deslocando o pistão, fixe o comprimento  $L$  da coluna de ar em aproximadamente 0,15 m. Mude a frequência do gerador até observar, no osciloscópio, as ondas de pressão com a maior intensidade. Essa condição corresponde a uma onda estacionária.

- b) Começando o experimento, desde as menores frequências para ter certeza de detectar o modo fundamental, registre os valores de  $f_n$  correspondentes aos sucessivos harmônicos. Construa uma tabela com os valores do índice  $n$  do harmônico e  $f_n$ .
- c) Faça o gráfico de  $f_n$  versus  $n$ . Que tipo de relação é observada? É coerente com as equações que definem a onda estacionária?
- d) Utilizando o método dos mínimos quadrados, determine a velocidade das ondas de som. Compare com valores de referência.
- e) Que valor deveria assumir o coeficiente linear? É coerente com o resultado do seu experimento?
- f) Como você poderia garantir que o primeiro harmônico observado corresponde a  $n = 1$ ? Qual seria a frequência esperada para o modo fundamental  $f_1$  no tubo utilizado? Coincide com sua menor frequência da tabela? Explique.

#### 4.3.3 Ondas estacionárias de som: geração de harmônicos em função do comprimento

Neste experimento, a frequência de excitação  $f$  é fixa e os harmônicos serão gerados variando o comprimento  $L$  da coluna de ar. Observe que, agora, de acordo com a equação (2), se  $f$  está fixa, o comprimento de onda  $\lambda$  deve ser constante. Portanto, de acordo com a equação (5), para obter uma onda estacionária, o comprimento do tubo deverá assumir valores  $L_n$  dados pela relação:

$$L_n = n \frac{\lambda}{2} \quad (6)$$

Assim, maiores comprimentos do tubo resultam em harmônicos de ordem  $n$  maior.

- a) Coloque uma frequência  $f$  da ordem de 2 KHz. Deslocando o pistão, observe que, em certas posições  $L_n$ , as ondas de pressão têm intensidades máximas, correspondendo a condições de onda estacionária.
- b) Começando com o pistão posicionado próximo ao alto-falante, para ter certeza de detectar o modo fundamental, registre os valores de  $L_n$  correspondentes a sucessivos harmônicos  $n$ .
- c) Construa uma tabela com os valores do índice  $n$  do harmônico e o respectivo  $L_n$ . Além disso, registre uma coluna com as diferenças entre valores sucessivos  $L_{n+1} - L_n$ . De acordo com a equação (6), o que deveria acontecer com os valores dessas diferenças?
- d) A partir dos dados obtidos, determine o valor mais provável de  $\lambda$  e sua incerteza.
- e) Calcule a velocidade do som no ar, com sua incerteza. Compare com o resultado obtido no item 4.3.2.

## ***Bibliografia***

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.. **Fundamentos de Física**. Vol. 2. LTC.

Tipler, P. A., Mosca, G.. **Física para Cientistas e Engenheiros**. Vol. 1. LTC.

Nussenzveig, H. M.. **Curso de Física Básica**. Vol. 2. Editora Blücher.

French, A. P.. **Vibrações e Ondas**. UNB.

Fishbane, P.M.. **Physics for Scientists and Engineers**. Pearson Prentice Hall.

Pizetta, D. C.; Wanderley, A. B.; Mastelaro, V. R.; Paiva, F. F.. **Uma avaliação experimental do tubo de ondas sonoras estacionárias**. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 39, n. 3, e3301, 2017.

Donoso, J. P.; Tannús, A.; Guimarães, F. G. Freitas, T. C.. **A física do violino**. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 30, n. 2, 2305, 2008.

Liljencrants, J. **End Correction at a Flue Pipe Mouth**. <http://www.fonema.se/mouthcorr/mouthcorr.htm>. Acessado em 12/08/2016.

Bohn, D. A.. **Environmental effects on the speed of sound**. Journal of the Audio Engineering Society, v. 36, n. 4, 1988.

#### 4.4 Apêndice: Ondas estacionárias em uma corda

A solução geral da equação de onda harmônica nos permite escrever:

$$z(x, t) = A \cos(kx) \cos(\omega t) + B \cos(kx) \sin(\omega t) + \quad (7)$$

$$+ C \sin(kx) \cos(\omega t) + D \sin(kx) \sin(\omega t)$$

onde  $z$  é amplitude da onda no ponto  $x$  da corda e tempo  $t$ . Outra combinação possível para uma onda periódica no espaço e no tempo seria  $z(x, t) = A \cos(kx) \cos(\omega t)$ . A forma empregada na equação (7) é a combinação mais geral, no entanto.

Para que a relação acima resulte em uma onda estacionária, precisamos escolher apropriadamente os parâmetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Se a corda tem comprimento  $x = L$ , partindo de  $x = 0$ , pela definição de onda estacionária, devemos ter extremidades fixas em  $x = 0$  e  $x = L$ . Isto equivale a escrever  $z(0, t) = z(L, t) = 0$  para qualquer tempo  $t$ . Se  $z(0, t) = 0$ , logo  $A \cos \omega t + B \sin \omega t = 0$  para todos os tempos. Isto é possível se  $A = B = 0$ , resultando em:

$$z(x, t) = (C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)) \sin(kx) \quad (8)$$

O termo  $C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$  pode ser reescrito na forma  $z_0 \cos(\omega t + \phi)$ . Isto pode ser feito se tomarmos  $C = z_0 \cos(\phi)$  e  $D = -z_0 \sin(\phi)$ . A equação da onda agora terá a forma:

$$z(x, t) = z_0 \cos(\omega t + \phi) \sin(kx) \quad (9)$$

Ainda é necessário estabelecer a relação que diz que  $z(L, t) = 0$  para todos os tempos  $t$ , pois a extremidade da corda ( $x = L$ ) não vibra. Por comparação com a equação acima, temos que:

$$\sin(kL) = 0 \quad (10)$$

A forma descrita na equação (9) descreve uma onda estacionária. Para qualquer ponto entre  $x = 0$  e  $x = L$ , a corda se move harmonicamente para cima e para baixo no tempo, com uma amplitude  $z_0 \text{sen}(kx)$  que varia de ponto a ponto ao longo da corda. A equação (10) implica na fixação da extremidade da corda. Para ser satisfeita, o argumento da função seno deve ser qualquer positivo inteiro múltiplo de  $\pi$ , ou  $k$  assumir valores discretos:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Como  $k = 2\pi/\lambda$ , esta condição se aplica no comprimento de onda da onda estacionária, limitando apenas alguns comprimentos de onda permitidos:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2}{n}L, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

As ondas permitidas são chamadas de **modos** – padrões de vibração permitidos – da onda estacionária. Assim, teremos o modo fundamental ou primeiro harmônico quando  $n = 1$ . Os valores de  $n = 2, 3, \dots$  são chamados de segundo harmônico, terceiro harmônico e assim subsequentemente.

## **Prática 5: Calorimetria**

### **5.1 Objetivos**

Determinar o calor específico de um sólido e o calor latente de condensação da água, utilizando um calorímetro com capacidade térmica determinada experimentalmente.

### **5.2 Introdução**

Considere dois corpos  $A$  e  $B$ , a diferentes temperaturas  $t_a$  e  $t_b$ , respectivamente, tais que  $t_a > t_b$ . Ao colocá-los em contato, ocorre uma transferência de energia térmica (calor) do corpo  $A$  para o corpo  $B$ . A transferência de calor cessa ao ser atingido o equilíbrio térmico entre os dois corpos, ou seja, quando suas temperaturas se igualam  $t'_a = t'_b$ .

A quantidade de calor  $Q$  corresponde à quantidade de energia térmica trocada pelos corpos. Assim sendo, no sistema internacional, a unidade de quantidade de calor é o *Joule* ( $J$ ). Por razões históricas, outra unidade é também usada, a *caloria* ( $cal$ ), cuja relação com o *Joule* é:  $1\ cal = 4,186\ J$ .

#### **5.2.1 Calor específico**

Quando um corpo muda sua temperatura desde um valor inicial  $t_i$  até uma temperatura final  $t_f$ , a quantidade de calor  $Q$  recebida (ou cedida) depende diretamente de sua massa  $m$  e da variação de temperatura  $\Delta t = t_f - t_i$ :

$$Q = cm\Delta t \tag{1}$$

sendo o coeficiente de proporcionalidade  $c$  denominado *calor específico* do corpo, uma propriedade específica do material que o constitui. Diferentes substâncias apresentam distintos valores de calor específico, os quais também dependem da fase (sólida, líquida ou gasosa) em que ela se encontra. Na tabela 5.1 são mostrados valores de calor específico para algumas substâncias.

Tabela 5.1 - Calor específico de algumas substâncias e materiais.

<b>Substância / Material</b>	<b><math>c</math> (cal/g°C)</b>
Gelo	0,500
Água (líquido)	1,000
Água (vapor)	0,480
Madeira (pinus)	0,600
Isopor	0,330
Concreto	0,180 - 0,230
Rocha	0,200
Alumínio	0,218
Cobre	0,093
Latão	0,092
Prata	0,056
Ouro	0,032
Etanol (a 0°C)	0,131
Freon R-12 (a -18°C)	0,217

Fonte: Elaborada pelos compiladores.

### 5.2.2 Calor latente: transições de fase

Existem outros fenômenos térmicos em que, embora ocorram trocas de calor, a temperatura permanece constante. É o que acontece quando o estado físico da substância está mudando de uma forma para outra: de líquido para gás, de sólido para líquido, de uma forma cristalina para outra etc. Esses processos são as transições de fase. A energia térmica entregada (ou cedida)

ao corpo não modifica sua temperatura, porém, afeta a organização molecular. A quantidade de calor necessária para que um corpo mude de fase, mantendo sua temperatura fixa, é proporcional à sua massa  $m$ :

$$Q = m L \quad (2)$$

sendo a constante de proporcionalidade  $L$ , denominada calor latente, uma característica da substância e do tipo de transição de fase. Assim, com a convenção  $Q > 0$  quando um sistema recebe calor, e  $Q < 0$  quando cede, o calor latente poderá ser positivo ou negativo, dependendo da mudança de fase ocorrer com ganho ou perda de calor pelo sistema. Na tabela 5.2 são mostrados alguns valores característicos.

Tabela 5.2 - Calor latente de algumas transições de fase.

Transição	$L$ (cal/g)
Fusão do Gelo (a 0°C)	80
Solidificação da Água (a 0°C)	-80
Vaporização da Água (a 100°C)	539
Condensação do Vapor da Água (a 100°C)	-539

Fonte: Elaborada pelos compiladores.

### 5.2.3 Medição das trocas de calor: o calorímetro

Vamos considerar um sistema termicamente isolado, em que não há troca de calor com o meio ambiente. Se  $N$  corpos, com temperaturas diferentes, forem colocados no interior desse sistema, haverá troca de calor entre eles de tal forma que a soma algébrica das quantidades de calor  $\Delta Q_i$  trocadas até o estabelecimento do equilíbrio térmico, será nula.

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 0 \quad (3)$$

Isso deve ocorrer porque a energia total do sistema, isolado do ambiente, deve ser constante.

No estudo das trocas de calor, os corpos ou substâncias são colocados no interior de *calorímetros*, dispositivos que isolam termicamente a amostra do meio exterior (figura 5.1). O desenho e a escolha de materiais do calorímetro visam minimizar a condução térmica com a amostra estudada. Porém, é inevitável que algumas partes do calorímetro participem das trocas de calor que ocorrem em seu interior e ele mesmo mude de temperatura. Para considerar esse efeito, é definida a capacidade térmica  $C$  do calorímetro. Esse valor constante permite relacionar a quantidade de calor envolvida na variação de temperatura que o calorímetro sofre:

$$Q = C \Delta t \quad (4)$$

Figura 5.1 - Calorímetro.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

### *A Física e a Engenharia Civil: massa térmica*

O projeto da resposta térmica de uma construção está baseado em conceitos como isolamento térmico e inércia térmica (“massa térmica”). O isolamento visa reduzir a transferência de calor entre o ambiente e o prédio e depende de propriedades como a **condutividade térmica** dos materiais e a **emissividade** das superfícies. A inércia térmica de uma construção está relacionada com outra propriedade: a **capacidade térmica** (ou seja, a quantidade de calor requerida para produzir uma certa variação de temperatura em um corpo). Estruturas com grandes massas e/ou feitas de materiais com valores altos de **calor específico** responderão, com pequenas variações de temperatura, às trocas de calor com o ambiente. Esse princípio é amplamente aproveitado em construções de regiões desérticas, que experimentam grande amplitude térmica entre o dia e a noite. O calor absorvido pelas paredes grossas, no decorrer do dia, é liberado durante a noite, amortecendo a variação térmica no ambiente interno. O efeito é favorecido pelo uso de materiais orgânicos na estrutura, por exemplo, o adobe, que, em geral, possui valores de calor específico maiores que muitos materiais inorgânicos. Uma outra forma de potencializar o amortecimento térmico é aproveitando o calor latente associado às transições de fase: a absorção/liberação de calor sem variação de temperatura. Têm sido desenvolvidos compostos com base em polímeros e parafinas que apresentam transições de fase sólido-sólido na faixa de temperatura de conforto térmico (20°C). Painéis rígidos, feitos desses materiais, podem ser aplicados como revestimento de paredes e tetos, sendo capazes de reduzir a extensão da oscilação térmica diária em até 7°C.

## 5.2.4 Determinação da capacidade térmica de um calorímetro

Para determinar a capacidade térmica de um calorímetro, vamos considerar uma quantidade de água de massa  $m_1$ , inicialmente a uma temperatura  $t_1$ , em equilíbrio no interior do calorímetro. Uma segunda quantidade de água, de massa  $m_2$ , a uma temperatura  $t_2$ , será colocada no interior do calorímetro. Se o calorímetro fosse ideal, com capacidade térmica nula, a transferência de calor entre essas quantidades de água seria descrita como:

$$m_1 c_a (t_f - t_1) + m_2 c_a (t_f - t_2) = 0 \quad (5)$$

em que  $t_f$  é a temperatura final de equilíbrio do sistema e  $c_a$  é o calor específico da água.

Entretanto, num calorímetro real haverá sempre troca de calor com as substâncias colocadas em seu interior e, portanto, deveremos adicionar essa quantidade de calor trocada à equação (5).

$$m_1 c_a (t_f - t_1) + m_2 c_a (t_f - t_2) + C(t_f - t_1) = 0 \quad (6)$$

Isolando a capacidade térmica do calorímetro na equação (6), obtemos o parâmetro desejado:

$$C = m_2 c_a \frac{(t_2 - t_f)}{(t_f - t_1)} - m_1 c_a \quad (7)$$

### 5.2.5 Determinação do calor específico de um sólido

Para determinar o calor específico  $c_m$  de um corpo metálico, podemos considerar que uma quantidade de água de massa  $m_1$ , a uma temperatura  $t_1$ , esteja em equilíbrio no interior de um calorímetro com capacidade térmica  $C$ . O corpo metálico, de massa  $m_2$ , é, então, preparado a uma temperatura inicial  $t_2$  diferente da temperatura da água no interior do calorímetro e é introduzido rapidamente no mesmo. Após certo tempo, o conjunto atinge o equilíbrio térmico na temperatura final  $t_f$ . As trocas de calor entre os componentes devem satisfazer a seguinte relação:

$$m_1 c_a (t_f - t_1) + m_2 c_m (t_f - t_2) + C(t_f - t_1) = 0 \quad (8)$$

Assim, temos:

$$c_m = \frac{(m_1 c_a + C)(t_f - t_1)}{m_2 (t_2 - t_f)} \quad (9)$$

***A Física e a Engenharia Mecânica: arrefecimento de motores***

O calor gerado durante o funcionamento de um motor de combustão deve ser retirado rapidamente do sistema através do sistema de arrefecimento. O calor deve ser transferido para o líquido de arrefecimento, passando através das galerias internas do motor. A principal propriedade do líquido é possuir um alto valor de **calor específico**, para garantir o menor aumento de sua temperatura. Por esse motivo a água é apropriada, mas a faixa de temperatura em estado líquido precisa ser estendida. A adição de 50% de etileno glicol desloca as temperaturas de congelamento e ebulição para  $-33^{\circ}\text{C}$  e  $163^{\circ}\text{C}$ , respectivamente. A pressurização do líquido pode elevar ainda mais a temperatura de ebulição, fenômeno que é aproveitado nas painéis de pressão. No líquido são adicionados anticorrosivos para proteção das partes metálicas e as borrachas das vedações. Uma bomba força a circulação do líquido pelo motor e, quando se atinge a temperatura de regime, é derivado para o radiador. Nesse componente ocorre a transferência do calor da água para o ambiente, maximizada pela grande área exposta da tubulação e a passagem forçada de ar pela superfície. O fluxo de água e a rotação do ventilador são controlados em função da temperatura do líquido. Após essa etapa de esfriamento, o fluido é injetado novamente no motor.

- Como o valor do *fluxo* de líquido influencia na eficiência da retirada de calor do motor? Deve ser alto, baixo ou existe algum valor ótimo intermediário?

**5.2.6 Determinação do calor latente de condensação da água**

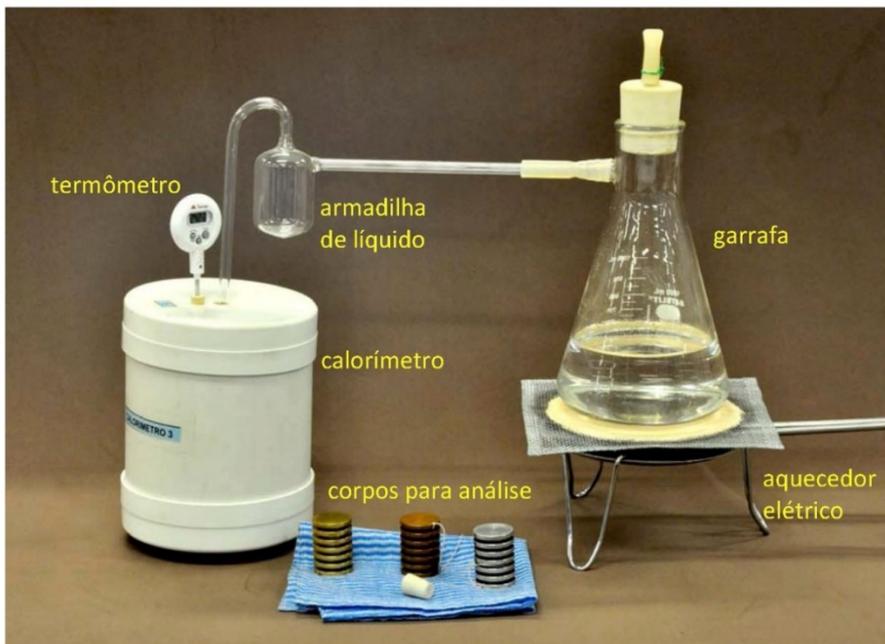
Para determinar o calor latente de condensação  $L_c$  da água específico, podemos considerar que uma quantidade de água de massa  $m_1$ , a uma temperatura  $t_1$ , esteja em equilíbrio no interior de um calorímetro com capacidade térmica  $C$ . A esse calorímetro pode ser acoplado um tubo que conduza vapor de água, conforme mostrado na figura 5.2. Com isso, durante o tempo que a conexão for mantida, ingressará no calorímetro uma massa de vapor  $m_2$ , com temperatura  $t_c$ , que condensará totalmente. Na situação final, o sistema completo (água, vapor condensado e calorímetro) estabiliza numa temperatura comum  $t_f$ . As trocas de calor no processo completo satisfazem a seguinte equação:

$$m_1 c_a (t_f - t_1) + m_2 L_c + m_2 c_a (t_f - t_c) + C (t_f - t_1) = 0 \quad (10)$$

em que o segundo e o terceiro termos dessa expressão estão relacionados, respectivamente, com o processo de condensação da massa  $m_2$  de vapor de água e com a variação de temperatura dessa mesma massa, já condensada, de  $t_c$  para  $t_f$ . A partir da equação (10) obtemos o valor do calor de condensação da água:

$$L_c = \frac{(m_1 c_a + C)(t_1 - t_f)}{m_2} + c_a(t_c - t_f) \quad (11)$$

Figura 5.2 - Montagem experimental para medida do calor de vaporização da água.

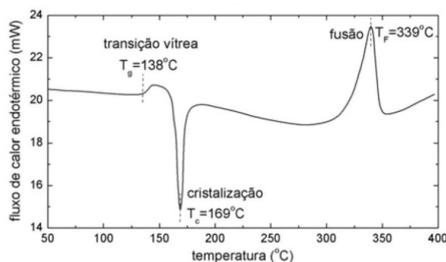


Fonte: Elaborada pelos compiladores.

### *A Física e a Engenharia: calorimetria diferencial por varredura*

A análise da resposta térmica de um material, em meio à troca de calor, pode fornecer informações importantes sobre sua composição, estrutura e transformações, através de mudanças de fase ou reações químicas. A Calorimetria Diferencial por Varredura (conhecida como DSC – *Differential Scanning Calorimetry*) é uma técnica que permite detectar essas mudanças e até medir o valor de calor específico em função da temperatura. Nesse tipo de calorímetro, um fluxo de calor constante é entregue à amostra de material que está em contato com uma amostra de referência inerte. A diferença de temperatura, entre as amostras, é medida em função do tempo, sendo obtido um gráfico de calor absorvido pela amostra de interesse, em função de sua temperatura. A presença de picos nesse gráfico revela a ocorrência de transições de fase ou reações químicas, pois, nesses processos, a amostra absorve (processo endotérmico) ou libera calor (processo exotérmico) sem variar sua temperatura. Assim, por exemplo, uma transição de fase de fusão é um evento endotérmico: energia é entregue ao material para separar as moléculas/átomos, não havendo aumento de temperatura.

Curva de análise térmica para uma amostra do polímero poliétercetona



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Na figura é mostrada a curva de análise térmica para uma amostra do polímero poliétercetona. Abaixo de 169°C, o polímero se encontra em estado vítreo; não há ordem estrutural das cadeias poliméricas. O diagrama mostra um evento endotérmico em aproximadamente 140°C, correspondente à transição vítrea: nessas temperaturas, as cadeias podem realizar movimentos cooperativos que estavam restritos em temperaturas mais baixas, o que provoca uma absorção maior de calor. Nesse regime, a fluidez do material aumenta. A 169°C ocorre um evento exotérmico de grande intensidade: a transição de cristalização. Ao aumentar a mobilidade molecular, as cadeias podem assumir configurações que minimizam as energias de interação interatômicas. Essas configurações correspondem ao estado cristalino, cuja estrutura molecular é ordenada e periódica. O excesso de energia potencial interatômica do estado vítreo, com relação ao cristalino, é liberado como calor. A 339°C se observa um evento endotérmico intenso, correspondente à fusão do cristal. O calor absorvido pelo material, correspondente ao calor latente de fusão, é a energia térmica necessária para separar as moléculas do sólido, vencendo as forças interatômicas atrativas.

### 5.3 Parte experimental

#### 5.3.1 Determinação da capacidade térmica do calorímetro

- a) Coloque, uma massa de água ( $m_1 \sim 120g$ ) no interior do calorímetro, inicialmente a uma temperatura cerca de  $10^\circ\text{C}$  abaixo da temperatura ambiente.
- b) Meça continuamente a temperatura no interior do calorímetro, até o sistema entrar em equilíbrio térmico, com temperatura  $t_1$ .
- c) Adicione, então, ao calorímetro, uma segunda massa de água ( $m_2 \sim 120g$ ), a uma temperatura  $t_2$  cerca de  $20^\circ\text{C}$  acima da temperatura ambiente.
- d) Espere novamente o sistema entrar em equilíbrio e meça sua temperatura  $t_f$ .
- e) Determine a capacidade térmica do calorímetro utilizando a equação (7). Compare esse resultado com o valor da capacidade térmica do copo de alumínio:  $C_{\text{copo}} = m_{\text{copo}} c_{Al}$ . Qual é a relação entre eles? Quem deveria ser maior?

#### 5.3.2 Determinação do calor específico de um metal

- a) Coloque, uma massa de água ( $m_1 \sim 200g$ ) no interior do calorímetro, inicialmente a uma temperatura cerca de  $10^\circ\text{C}$  abaixo da temperatura ambiente.
- b) Meça continuamente a temperatura no interior do calorímetro, até o sistema entrar em equilíbrio térmico, com temperatura  $t_1$ .

- c) Coloque, então, no interior do calorímetro, uma peça de metal com massa  $m_2$  e temperatura  $t_2$  igual a temperatura de ebulição da água
- d) Espere novamente o sistema entrar em equilíbrio e meça sua temperatura  $t_f$ .
- e) Determine o calor específico do metal utilizando a equação (9) e compare com o valor tabelado. Discuta seus resultados. Se necessário, repita o procedimento.

### 5.3.3 Determinação do calor latente de condensação da água

Mediremos o calor latente de condensação da água,  $L_c$ , utilizando o dispositivo mostrado na figura 5.2. Um balão contém água em ebulição, sendo o vapor conduzido através de um tubo de vidro até o interior de um calorímetro. O bulbo de vidro serve como armadilha para coletar gotas de água que, eventualmente, venham condensar durante o trajeto, garantindo, assim, que somente vapor ingressará no calorímetro.

- a) Sem colocar o tubo de vidro no interior do calorímetro, aqueça água no balão até atingir a temperatura de ebulição,  $t_c$ . Aguarde até que o sistema atinja a condição de regime estacionário, na qual a água está em ebulição e o vapor flui controladamente no tubo de vidro totalmente aquecido.
- b) Coloque, então, uma massa de água ( $m_1 \sim 150g$ ) no interior do calorímetro, inicialmente a uma temperatura cerca de  $10^\circ\text{C}$  abaixo da temperatura ambiente.
- c) Meça continuamente a temperatura no interior do calorímetro, até o sistema entrar em equilíbrio térmico, com temperatura  $t_1$ .

- d) Introduza o tubo de vidro no interior do calorímetro, conforme mostrado na figura 5.2.
- e) Meça continuamente a temperatura do calorímetro até que ele atinja cerca de  $70^{\circ}\text{C}$ . Isso equivale, aproximadamente, à entrada de  $20\text{g}$  de vapor no calorímetro.
- f) Retire o tubo de vidro do calorímetro, tampe, espere o sistema entrar em equilíbrio e meça a temperatura  $t_f$  no interior do calorímetro.
- g) Determine a massa  $m_2$  de água condensada conhecendo a massa do copo do calorímetro e a massa inicial  $m_1$  de água colocada inicialmente nele.
- h) Determine o calor latente de condensação da água através da equação (11). Discuta seu sinal e compare com o valor tabelado.

## ***Bibliografia***

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.. **Fundamentos de Física**. Vol. 2. LTC.

Tipler, P. A., Mosca, G.. **Física para Cientistas e Engenheiros**. Vol. 1. LTC.

---

## ***Prática 6: Processos térmicos em gases***

### **6.1 Objetivos**

Nesta prática serão estudados processos térmicos em gases. Inicialmente, será determinado o valor do fator  $\gamma$  do ar, definido como a razão entre os calores específicos a pressão e a volume constantes ( $\gamma = c_p/c_v$ ), utilizando os métodos de Clément-Desormes e de Ruchardt. Será, também, determinada a temperatura de zero absoluto utilizando um termômetro de gás a volume constante.

### **6.2 Introdução**

#### **6.2.1 Fator $\gamma$ do ar**

Um processo adiabático é aquele em que o sistema não troca calor com o exterior. Para verificar como a pressão e o volume de um gás ideal variam durante um processo adiabático precisamos de dois ingredientes. Primeiramente, precisamos da equação de estado de um gás ideal, dada por:

$$PV = nRT = NkT \quad (1)$$

em que  $n$  é o número de moles do gás,  $N$  o número de moléculas do gás,  $R$  é a constante dos gases e  $k$  a constante de Boltzmann, ou seja,  $Nk = nR$  ou  $R = NA k$ , sendo  $NA$  o número de Avogadro.

O outro ingrediente é o Teorema da Equipartição da Energia, o qual diz que, em um gás ideal em equilíbrio, à temperatura  $T$  (em Kelvin), a energia média de cada molécula por grau de liberdade é:

$$\frac{1}{2}kT \quad (2)$$

Ou seja, a energia total do gás é:

$$U = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT \quad (3)$$

na qual  $f$  é o número de graus de liberdade da molécula do gás (naquela temperatura). Em um processo adiabático não há troca de calor e, portanto, a conservação de energia diz que a variação de energia  $dU$  deve ser igual a menos o trabalho  $dW$  realizado pelo gás.

$$dU + dW = 0 \quad (4)$$

A variação do trabalho realizado pelo gás, pode, ainda, ser escrita da seguinte forma:

$$dW = PdV \quad (5)$$

De (3) e (5) temos:

$$dU = \frac{f}{2}nRdT = -dW = -PdV \quad (6)$$

De (1) temos:

$$VdP + PdV = nRdT \quad (7)$$

Logo,

$$\frac{f}{2}(VdP + PdV) = -PdV \rightarrow \frac{f}{2}VdP = -\left(1 + \frac{f}{2}\right)PdV \quad (8)$$

Definindo  $\gamma = \frac{f+2}{f}$ , temos:

$$VdP = -\gamma PdV \rightarrow \frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V} \rightarrow d \log(P) = -d \log(V^\gamma) \quad (9)$$

Ou seja,

$$d [\log(PV^\gamma)] = 0 \quad (10)$$

e, portanto,

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad (11)$$

A capacidade calorífica é definida como a razão entre o calor absorvido e o aumento de temperatura. Assim:

$$\Delta Q = C \Delta T \quad (12)$$

Para um processo a volume constante, o gás não realiza trabalho e o calor é utilizado somente para aumentar a energia. De (3) temos:

$$\Delta Q = \frac{f}{2} n R \Delta T \quad (13)$$

Logo, a capacidade calorífica, a volume constante, é:

$$C_V = \frac{f}{2} n R \quad (14)$$

Se o processo é feito à pressão constante, então, o calor é utilizado para mudar a energia e, também, realizar trabalho, ou seja:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W \quad (15)$$

De (1) temos que, à pressão constante:

$$P \Delta V = n R \Delta T \quad (16)$$

Logo,

$$\Delta Q = \frac{f}{2} n R \Delta T + n R \Delta T = \left(1 + \frac{f}{2}\right) n R \Delta T \quad (17)$$

e

$$C_P = \left(1 + \frac{f}{2}\right) n R \quad (18)$$

Concluimos, então, que

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma \text{ e } C_p - C_v = nR \quad (19)$$

Como o calor específico pode ser obtido da capacidade calorífica, simplesmente dividindo pela massa, a razão entre o calor específico à pressão constante  $c_p$  e o calor específico à volume constante  $c_v$ , também é igual a constante  $\gamma$ , ou seja:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (20)$$

### 6.2.1.1 O método de Clément – Desormes

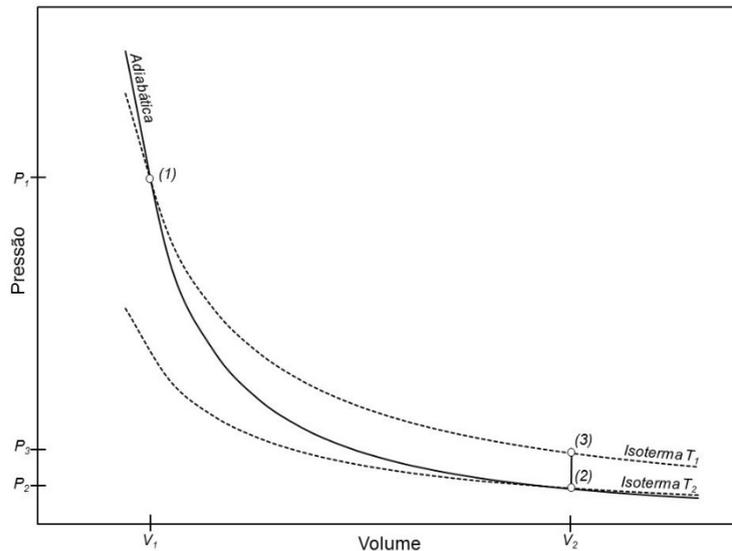
O calor específico de sólidos e líquidos usualmente é medido com a amostra em condições atmosféricas e sem controle do volume do material. Por esse motivo, trata-se de calores específicos medidos à pressão constante  $c_p$ . Esse foi o caso do experimento realizado na Prática 5, cuja peça de metal se encontrava essencialmente à pressão atmosférica.

No caso de um gás, é muito mais simples fazer o experimento com o gás contido em um recipiente rígido, como, por exemplo, uma ampola de vidro com pouca expansão térmica dentro da faixa de temperatura do experimento. Desse modo, nessa condição, o valor medido é o calor específico a volume constante  $c_v$ . O valor de  $c_p$  de um gás é maior que  $c_v$ , pois, no experimento, à pressão constante, o calor entregue ao material provoca também expansão do gás, o que significa que parte dessa energia foi convertida em trabalho e não em aumento da energia térmica do corpo.

A razão entre os calores específicos à pressão e volume constante (equação 20), é um valor que aparece frequentemente na descrição de processos termodinâmicos feitos com gases. Essa razão pode ser medida através de processos isobáricos e isocóricos, determinando-se o calor

específico à pressão e volume constante, respectivamente. Isso foi feito, pela primeira vez, em 1819 pelos químicos Charles-Bernard Desormes e Nicolas Clément. O método consiste em aplicar sobre o gás, suposto ideal, uma sequência de dois processos ilustrados na figura 6.1: uma expansão adiabática do estado (1) até (2), e um aquecimento isocórico desde (2) até (3).

Figura 6.1 - Diagrama P-V para o processo aplicado sobre o gás no experimento de Clément – Desormes. Entre o estado inicial (1) e o (2) o processo é adiabático e entre (2) e (3) é isocórico.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

No estado inicial de equilíbrio (1), certa quantidade  $n$  de moles de gás se encontram à pressão  $P_1$  acima da pressão atmosférica, com volume  $V_1$  e temperatura  $T_1$  igual à temperatura ambiente. Uma expansão adiabática é realizada até o estado (2) com pressão  $P_2$  igual à pressão atmosférica, volume  $V_2$  e temperatura  $T_2$  menor que a temperatura ambiente. Imediatamente é

realizado um aquecimento isocórico até o estado (3), à temperatura ambiente  $T_1$  e pressão  $P_3$ .

Para calcular o fator  $\gamma$  do gás, consideramos a relação entre  $P$  e  $V$  no decorrer de um processo adiabático, conforme a equação (11). Assim, podemos escrever que:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \quad (21)$$

Dessa relação, é possível chegar a escrever o fator  $\gamma$  como:

$$\gamma = \frac{\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)} \quad (22)$$

Para obter o resultado apenas em termos de pressões e não de volumes que, na prática, seriam difíceis de medir com precisão, pode-se considerar agora o processo isocórico entre (2) e (3) e o fato que os estados (1) e (3) se encontram sobre a mesma isoterma de temperatura  $T_1$ . Resulta assim:

$$\gamma = \frac{\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{\ln\left(\frac{P_3}{P_1}\right)} \quad (23)$$

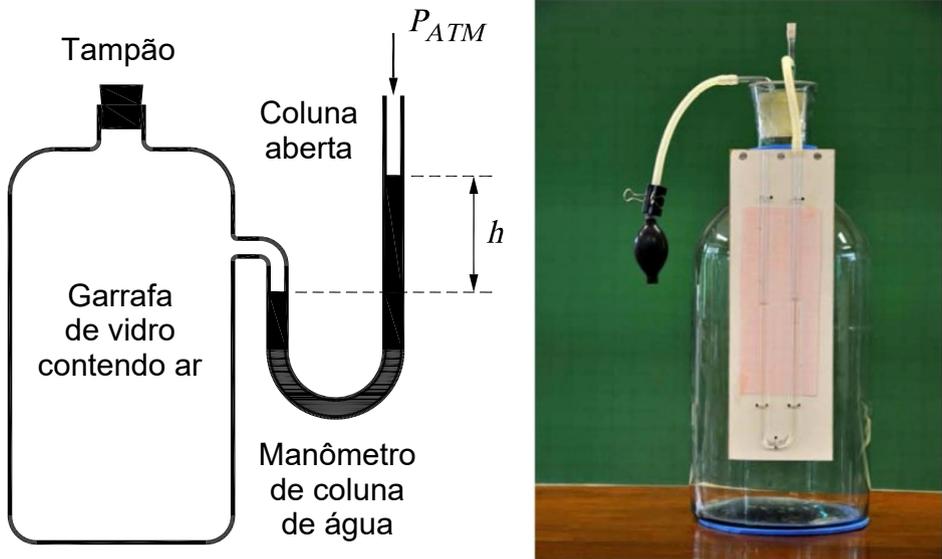
### 6.2.1.1.1 Medida das pressões

No experimento montado no laboratório, as pressões serão medidas usando um manômetro de coluna de água aberto num extremo, tal como indicado na figura 6.2.

Nesse caso, as pressões, em função da altura  $h$  da coluna, resultam em:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{ATM} + \rho g h_1 \\ P_2 &= P_{ATM} \\ P_3 &= P_{ATM} + \rho g h_3 \end{aligned} \quad (24)$$

Figura 6.2 - Experimento de Clément – Desormes. À esquerda está mostrado o esquema do dispositivo com o manômetro acoplado. À direita, a montagem experimental com a bomba manual para pressurização do gás na garrafa e o manômetro com coluna de água.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Observe que para  $P_2$ , que é igual à pressão atmosférica  $P_{ATM}$ , a altura da coluna de água deve ser nula ( $h_2 = 0$ ). Com essas expressões e com a equação (23) já é possível calcular  $\gamma$  a partir das medidas de  $P_{ATM}$ ,  $h_1$  e  $h_3$ . No entanto, é possível ainda obter uma expressão mais compacta para  $\gamma$ . Para isso, reescrevemos as pressões  $P_1$  e  $P_3$  da seguinte forma:

$$P_1 = P_{ATM} \left( 1 + \frac{\rho g h_1}{P_{ATM}} \right) \text{ e } P_3 = P_{ATM} \left( 1 + \frac{\rho g h_3}{P_{ATM}} \right) \quad (25)$$

Podemos, então, utilizar uma expressão da função logaritmo na forma de uma série infinita:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (26)$$

que é válida quando  $|x| < 1$ . Quanto mais termos forem considerados na série do lado direito, mais próximo será o resultado da soma ao valor de  $\ln(1 + x)$ . A aproximação mais simples dessa expressão, válida quando  $x$  é muito pequeno ( $x \ll 1$ ), é simplesmente considerar o primeiro termo da série

$$\ln(1 + x) \approx x \quad (27)$$

Combinando as equações (23) e (25), é possível usar a aproximação (27) nos logaritmos resultando na expressão aproximada:

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_3} \quad (28)$$

### 6.2.1.2 Método de Ruchardt

Empurrando ou puxando o êmbolo de um recipiente, que contém um gás, e soltando-o, ele oscilará em torno da posição de equilíbrio; existe sobre o gás uma força restauradora que, quando  $\Delta V \ll V_0$ , é análogo à força que atua na mola de um sistema massa-mola deslocado da posição de equilíbrio. O gás contido no recipiente é, assim, análogo a uma mola. Considere um recipiente de volume  $V$  que contém um gás (no caso ar) e onde se coloca um tubo vertical conforme mostra a figura 6.3.

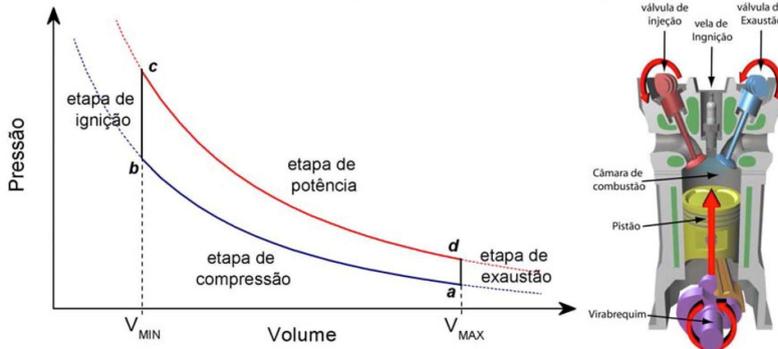
Uma esfera de aço de massa  $m$  e diâmetro ligeiramente menor do que o diâmetro interno do tubo é colocada nele, funcionando como um êmbolo para o gás contido no recipiente. Quando a esfera está na posição de equilíbrio, a pressão no interior do recipiente é dada por:

$$P = P_{ATM} + \frac{mg}{A} \quad (29)$$

na qual  $A$  é a área da seção transversal do tubo.

### *A Física e a Engenharia: o motor de combustão interna*

Os motores de combustão interna à gasolina são o exemplo mais comum de máquinas térmicas. O princípio de funcionamento pode ser descrito pela sequência de processos termodinâmicos conhecidos como **ciclo de Otto**, mostrado na figura a seguir, à esquerda, que é implementado pelo sistema mecânico mostrado na figura, à direita. As substâncias submetidas a esses processos são a mistura de ar e gotículas de gasolina injetadas na câmara de combustão. O ciclo de Otto de quatro tempos está definido pelas seguintes etapas:



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

**$a \rightarrow b$ :** Uma compressão da mistura realizada rapidamente pelo pistão, que pode ser considerada aproximadamente adiabática.

**$b \rightarrow c$ :** A combustão da gasolina na mistura, induzida com a faísca gerada pela vela de ignição. O processo de ignição libera calor e aumenta a pressão e temperatura muito rapidamente, sem movimentar inicialmente o pistão. Portanto, essa etapa pode se aproximar por um processo isocórico (volume constante). A energia associada à combustão pode ser dimensionada conhecendo o valor do calor de combustão da substância colocada em ignição com o oxigênio. Para gasolina, em condições padrão de pressão e temperatura, é de 47MJ/Kg.

**$c \rightarrow d$ :** A explosão eventualmente acelera o pistão que gira o virabrequim: essa é a etapa de potência (é aqui que o motor produz trabalho mecânico útil). Como o descolamento é rápido, a expansão do gás pode ser considerada adiabática.

**$d \rightarrow a$ :** No final do percurso do pistão, é necessário liberar o gás de exaustão do cilindro e injetar ar e gasolina novos. O gás, ainda quente, é liberado pela abertura da válvula de exaustão. A válvula é fechada e, imediatamente, é aberta a válvula de injeção que permite a entrada de gasolina e ar na temperatura ambiente. O efeito de todo esse processo de exaustão equivale a manter o volume de fluido constante e liberar calor para o exterior, podendo ser aproximado por um processo isocórico. A partir desse ponto, o motor está preparado para reiniciar o ciclo.

(continua)

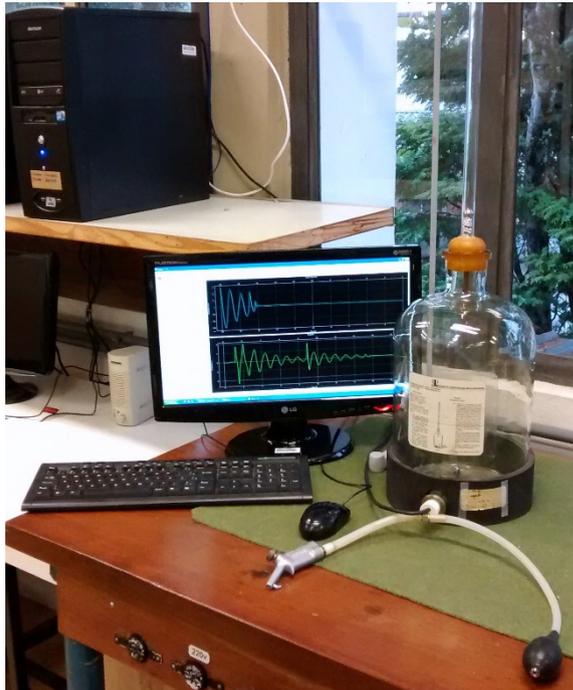
### *A Física e a Engenharia: o motor de combustão interna (continuação)*

A razão entre os volumes máximos e mínimos atingidos no ciclo é a razão de compressão do motor  $r = \frac{V_{MAX}}{V_{MIN}}$ . Quanto maior esse fator é, maior é a capacidade do motor realizar o trabalho. Valores típicos, para motores de carros, variam entre 8 e 12. O coeficiente de eficiência máxima do motor é definido como a razão entre o trabalho total  $W$  produzido no ciclo pelo calor  $Q$ , gerado na combustão:  $e = \frac{W}{Q}$ . Para um ciclo Otto idealizado, supondo que a mistura se comporta como um gás ideal, resulta em:

$$e = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}$$

Portanto, o fator  $\gamma = c_p/c_v$  do fluido de combustão é fundamental para definir a eficiência do motor. Como exemplo, para um sistema com  $r = 10$ , assumindo o valor de  $\gamma$  do ar (1,40), a eficiência máxima termodinâmica seria 0,60. No entanto, a eficiência dos motores reais é consideravelmente mais baixa, da ordem de 0,40, devido ao atrito das partes móveis, transferência de calor para o cilindro e pistão e menor calor de combustão da mistura, entre outros fatores.

Figura 6.3 - Montagem utilizada nas medidas do método de Ruchardt.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

Se a esfera é deslocada de uma distância  $y$  da posição de equilíbrio, o volume do recipiente variará de:

$$dV = Ady \quad (30)$$

A pressão também varia devido ao deslocamento da esfera, provocando uma força restauradora sobre ela, dada por

$$dF = AdP \quad (31)$$

Como as oscilações da esfera são rápidas, as variações de volume e de pressão podem ser consideradas adiabáticas, de maneira que:

$$PV^\gamma = \text{constante} \rightarrow V^\gamma dP + \gamma PV^{\gamma-1} dV = 0 \quad (32)$$

Combinando as equações (30), (31) e (32), obtém-se para a força restauradora:

$$F = -\frac{\gamma PA^2}{V} y \quad (33)$$

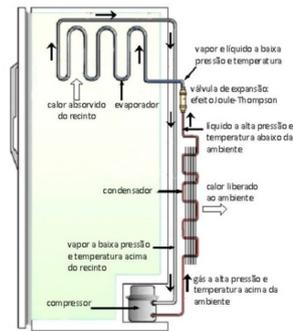
Fazendo analogia com a força restauradora de uma mola ( $F = -ky$ ), podemos escrever para o período de oscilação da esfera:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\left(\frac{\gamma PA^2}{V}\right)}} \quad (34)$$

em que  $P$  é dada pela equação (29).

### *A Física e a Engenharia: refrigeradores*

Num processo de expansão adiabática de um gás, o volume aumenta, não há troca de calor com o ambiente e a temperatura diminui. Esse fenômeno é a base das máquinas que bombeiam calor, como, por exemplo, os aparelhos de ar-condicionado ou refrigeradores. Essas máquinas usam um caso particular de expansão adiabática, chamada de efeito de Joule-Thompson, que ocorre após um gás ser forçado a passar por uma pequena abertura (uma válvula capilar ou um meio poroso).



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

A figura mostra um esquema do refrigerador por compressão de vapor, que é o sistema comumente utilizado em geladeiras. Existe um fluido, por exemplo, o gás freon, que circula pelo sistema em ciclo fechado impulsionado por um compressor. O gás é pressurizado até passar para o estado líquido e é injetado na válvula de expansão. Após a passagem pela válvula, a temperatura cai bruscamente e há vaporização parcial do líquido devido à queda de pressão. Essa mistura fria de vapor e gotas de líquido circula pelo evaporador (uma tubulação de cobre longa em forma de serpentina). Nas geladeiras, é a tubulação que fica na parte superior, envolvendo a cavidade do freezer. Como o fluido está mais frio que o conteúdo do freezer, o líquido absorve calor suficiente para transpor-se em estado de vapor. Como foi analisado na prática de calorimetria, nessa transição é absorvido calor (calor latente de vaporização) sem mudança de temperatura. Dessa forma, o fluido consegue extrair calor do recinto de esfriamento.

O compressor retira esse fluido, agora em estado de vapor, e injeta-o na seção do condensador (uma serpentina de cobre em contato com o ambiente). Na geladeira, é a tubulação que fica na parte externa. O compressor aumenta a pressão e a temperatura do gás, acima da temperatura ambiente, que é injetado no condensador. Ao passar pela serpentina do condensador, em contato térmico com o ambiente, o gás libera calor e condensa (calor latente de condensação). Dessa forma, o calor foi bombeado de uma cavidade (o freezer ou a sala refrigerada) para o ambiente externo. Nesse ponto, o ciclo é repetido novamente para continuar com a extração de calor. Um par bimetálico desliga o compressor quando a temperatura do recinto atinge um valor de referência mínimo e liga novamente quando a temperatura chega acima do limite máximo tolerado. O aparelho de ar-condicionado funciona de forma semelhante, com a adição de ventiladores no condensador e no evaporador para fazer, de maneira mais eficiente, a troca de calor com os ambientes externo e interno, respectivamente.

## 6.2.2 Expansão térmica dos gases: zero absoluto

Aumentando-se a temperatura de um gás, contido em um recipiente, ele poderá expandir de diversas maneiras, já que a pressão e o volume podem variar simultaneamente. Evidentemente, poderá haver apenas mudança de volume se mantivermos a pressão constante ou ele exercerá pressões diferentes se o volume for mantido constante.

Poderíamos realizar essa expansão colocando o gás em um cilindro fechado por um êmbolo, que pode ser deslocado sem atrito, no qual atua uma pressão constante. Experimentalmente, pode-se observar que a variação de volume à pressão constante é praticamente proporcional ao volume inicial e a variação de temperatura. Se a temperatura inicial do gás é  $0^\circ\text{C}$  e seu volume inicial é  $V_0$ , o volume  $V(T)$ , à temperatura  $T(^{\circ}\text{C})$ , será dado por:

$$V(T) = V_0(\beta T + 1) \quad (35)$$

em que  $\beta$  é o coeficiente de dilatação do gás à pressão constante. Tipicamente,  $\beta = 0,003660 \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \cong \frac{1}{273} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  e pode ser considerado como o coeficiente de dilatação dos gases ideais à pressão constante.

Se, agora, aumentarmos a temperatura do gás, mantido a volume constante, sua pressão deverá variar linearmente com a temperatura. Se a temperatura inicial do gás é  $0^\circ\text{C}$  e sua pressão inicial é  $P_0$ , a pressão  $P(T)$ , à temperatura  $T(^{\circ}\text{C})$ , será dado por:

$$P(T) = P_0(\beta T + 1) = P_0\beta T + P_0 \quad (36)$$

em que  $\beta$ , nesse caso, é o coeficiente de dilatação do gás a volume constante. Isso pode ser feito, pois os coeficientes de dilatação são idênticos para o gás ideal, enquanto que para os gases reais, ambos coeficientes são muito próximos ( $\beta \cong \frac{1}{273} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ). Substituindo esse valor na equação (36) temos:

$$P(T) = P_0 \left( 1 + \frac{T}{273} \right) \quad (36)$$

Nesse caso podemos observar que, para  $T = -273^\circ\text{C}$ , obtemos pressão nula. Denominamos essa situação de temperatura de zero absoluto e é a menor temperatura que se pode alcançar fisicamente.

### 6.3 Parte experimental: fator $\gamma$ do ar

#### 6.3.1 Método de Clément – Desormes

O recipiente utilizado para conter o gás (ar) será um garrafão de vidro com um manômetro de água acoplado, como mostrado na figura 6.2. A garrafa tem uma válvula que permite tampar/destampar (equivalente ao mostrado na figura 6.2.b) e uma entrada adicional acoplada a uma bomba manual, que permite aumentar a pressão interior do gás. O procedimento sugerido está indicado a seguir, seguindo a sequência ilustrada na figura 6.4.

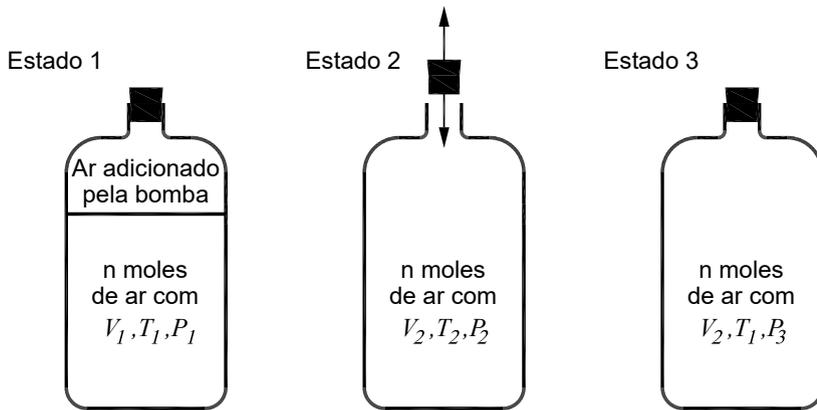
- a) Tampe o garrafão e, utilizando a bomba manual, injete certa quantidade de ar no mesmo para aumentar a pressão interna. Espere o sistema entrar em equilíbrio (observe a estabilização da leitura do manômetro) num estado com temperatura ambiente  $T_1$  e pressão  $P_1$  (altura  $h_1$  no manômetro). Esse é o estado inicial (1). Registre o valor de  $h_1$ .
- b) Abra e feche rapidamente a válvula do garrafão. Com isso, pressão interna deve ficar igual à pressão atmosférica:  $P_2 = P_{ATM}$ . Como o processo de abrir e fechar a válvula é rápido, o gás que está no interior do garrafão não tem tempo de trocar calor com o ambiente nesse intervalo de tempo; a condutividade térmica do vidro é baixa. Portanto, o processo pode ser considerado adiabático. Quando o tampão é fechado, estamos no estado (2).

- 
- c) Imediatamente após a expansão adiabática, o gás deveria estar numa temperatura  $T_2$  menor que a temperatura ambiente. Espere um certo tempo até a temperatura do sistema atingir a temperatura ambiente  $T_1$ . Como a garrafa é rígida, o processo ocorre com volume constante  $V_2$  (processo isocórico). Quando o gás atingir a temperatura  $T_1$ , o sistema estará no estado final (3). Registre a pressão  $P_3$  nessa condição (altura  $h_3$  no manômetro).
- d) Calcule  $\gamma$  e repita o processo, experimentando diferentes tempos de abertura do tampão do garrafão. Decida qual é o mais apropriado para garantir que os processos estejam seguindo o esperado: tempos curtos demais talvez não sejam suficientes para liberar o excesso de pressão e atingir a pressão atmosférica dentro da garrafa; tempos longos demais são inconvenientes, pois o ar tem tempo de trocar calor com o ambiente, e o processo já não poderá ser considerado adiabático.
- e) Uma vez escolhido o tempo mais apropriado, repita várias vezes o processo para fazer uma estatística sobre  $\gamma$  (média e desvio padrão).
- f) Deduza as equações (22) e (28) e inclua em seu relatório.

*Questões para serem discutidas durante a prática e incluídas no relatório:*

- a) Qual é a quantidade de gás que efetivamente participa do processo completo (1)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  (3)? É todo o ar que está no garrafão após pressurizar com a bomba, no estado (1)?
- b) Usando valores experimentais, faça um cálculo aproximado do número de moles de ar  $n$  que efetivamente participaram no processo.

Figura 6.4 - Representação esquemática dos três estados considerados no processo de Clément – Desormes.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

### 6.3.2 Método de Ruchardt

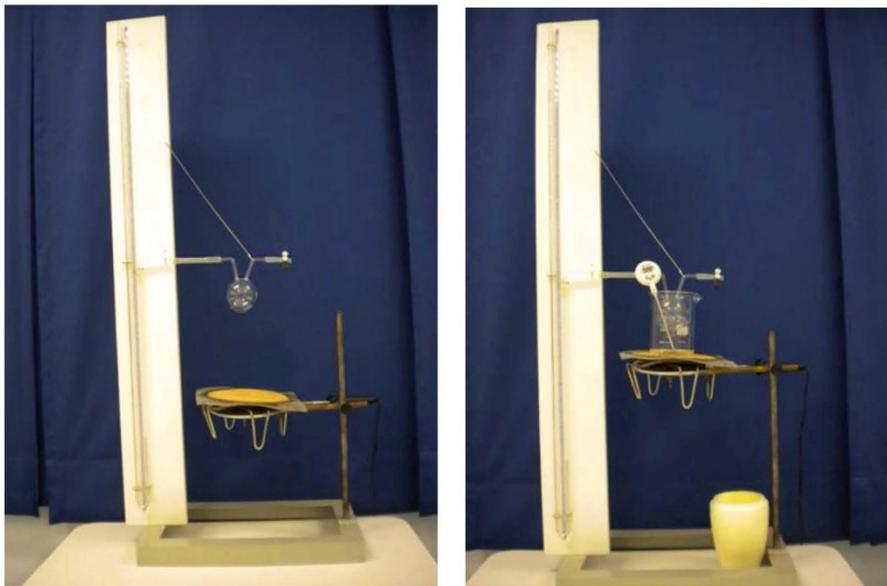
- Utilizando o dispositivo esquematizado na figura 6.3, meça o período de oscilação da esfera **e todas as grandezas necessárias** para calcular o  $\gamma$  do ar pela equação (34).
- Discuta o resultado obtido e compare com aquele obtido com o método de Clément – Desormes. Compare, ainda, com os valores esperados para gases monoatômicos ( $\gamma \approx 1,67$ ), diatômicos ( $\gamma \approx 1,40$ ) e poliatômicos ( $\gamma \approx 1,30$ ).

## 6.4 Parte experimental: zero absoluto

O termômetro a gás, a volume constante, consiste em um bulbo de vidro contendo hélio, que é ligado a um barômetro do tipo Torricelli, cujo desenho esquemático é mostrado na figura 6.5. O termômetro é formado por um tubo

em “U” contendo mercúrio em seu interior e com um dos braços lacrados para que a pressão em seu interior seja zero. No outro braço é colocado um balão de vidro contendo gás hélio a uma pressão próxima da pressão atmosférica. Para a leitura de pressão nesse barômetro, basta observar que a pressão exercida pelo gás He, no ponto A, é exatamente igual à pressão exercida pela coluna de Hg sobre o ponto B, a qual pode ser obtida diretamente pela sua altura H (em  $cmHg$ ).

Figura 6.5 - Termômetro a gás a volume constante.



Fonte: Elaborada pelos compiladores.

### 6.4.1 Determinação do zero absoluto utilizando um termômetro a gás

- a) Meça a pressão do gás para diversas temperaturas obtidas da seguinte forma: i) bulbo mergulhado em água à temperatura ambiente; ii) bulbo mergulhado em gelo em fusão; iii) bulbo mergulhado em nitrogênio líquido ( $T = -196^{\circ}\text{C}$ ); iv) bulbo mergulhado em água em ebulição.
- b) Construa uma tabela com os dados obtidos.
- c) Construa um gráfico da pressão (medida em *cmHg*) em função da temperatura (medida em  $^{\circ}\text{C}$ ).
- d) Determine, pelo método dos mínimos quadrados, o coeficiente de dilatação dos gases ideais a volume constante ( $\beta$ ) e o valor de  $P_0$ . Com os valores de  $\beta$  e  $P_0$ , escreva a equação que descreve esse comportamento.
- e) Utilizando a equação determinada no item (d), trace uma reta sobre os pontos experimentais. A partir da extrapolação dessa reta, no gráfico, determine a temperatura de zero absoluto.

## ***Bibliografia***

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.. **Fundamentos de Física**. Vol. 2. LTC.

Tipler, P. A., Mosca, G.. **Física para Cientistas e Engenheiros**. Vol. 1. LTC.

Software Wavy. Disponível em: <https://github.com/dpizetta/wavy>.

Christy, R. W.; Rieser, M. L.. **Modification of Rüchardt's Experiment**. American Journal of Physics. 26: 37, 1958.

---

Hafner, E. M.. **Refined Rüchhardt Method for  $\gamma$** . American Journal of Physics. 32: xiii. 1964.

Donnally, B.; Jensen, H.. **Another Refinement for Rüchardt's Method for  $\gamma$** . American Journal of Physics. 32 (4). 1964.

Torzo, G.; Delfitto, G.; Pecori, B.; Scatturin, P.. **A New Microcomputer-Based Laboratory Version of the Rüchardt Experiment for Measuring the Ratio  $\gamma=C_p/C_v$  in Air**. American Journal of Physics. 69 (11): 1205. 2001.

Bottecchia, O. L.. **O experimento de Clement-Desormes no século XXI**. Química Nova, 33(8), 1800-1804. 2010.



## **Anexo 1: Incerteza em medidas diretas**

A existência de erros aleatórios pode fazer com que o resultado numérico  $x_i$ , obtido da medida de uma grandeza física  $X$ , não seja reprodutível em ocasião da repetição do experimento. Dessa maneira, uma série de  $N$  medidas pode mostrar uma dispersão de valores. Quando a dispersão é aleatória, aparecem valores acima e abaixo do valor verdadeiro com a mesma probabilidade. Assim, ao calcular a média aritmética dos  $x_i$ , dada pela equação (1), os erros aleatórios tendem a se cancelar mutuamente.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (1)$$

Para um número  $N$ , suficientemente grande de medidas, podemos esperar que  $\bar{x}$  se aproxime do valor verdadeiro e o resultado do experimento seja cada vez mais exato.

Qual será, então, a incerteza provável associada à dispersão dos resultados do experimento? Existem duas formas mais comuns de avaliar o grau de dispersão: o desvio médio e o desvio padrão. O desvio médio  $\Delta$  é simplesmente a média aritmética dos desvios de cada dado experimental com relação ao valor médio, em módulo, conforme mostrado a seguir:

$$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{N} \quad (2)$$

O desvio padrão  $\sigma$  tem um significado semelhante, utilizando a função quadrado, que também é sempre positiva, em lugar do módulo dos desvios.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (3)$$

A raiz quadrada garante que  $\sigma$  tenha as mesmas unidades da grandeza  $X$ . Tanto  $\Delta$  como  $\sigma$  indicam a ordem de grandeza da dispersão dos dados ao redor do valor de  $\bar{x}$ . Assim, o resultado do processo de medida pode ser informado fornecendo o intervalo  $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ . Um tratamento estatístico rigoroso mostra que se o experimento for repetido, existe uma probabilidade de 68% de que o valor medido se encontre dentro desse intervalo<sup>3</sup>.

Assim, o resultado do experimento com sua incerteza, deve ser representado da seguinte forma:

$$\bar{x} \pm \sigma \quad (4)$$

ou, de forma menos rigorosa:

$$\bar{x} \pm \Delta \quad (5)$$

É importante, portanto, entender que o resultado do experimento não é, simplesmente, um número  $\bar{x}$ , o valor mais provável, mas um *intervalo de confiança* que dá uma ideia da magnitude dos erros aleatórios afetando o experimento. Os experimentos de maior precisão são aqueles cujo desvio padrão é menor. Observe que um experimento preciso ( $\sigma$  pequeno, erros aleatórios pequenos) não, necessariamente, é um experimento exato ( $\bar{x}$  próximo do valor verdadeiro); a presença de erros sistemáticos pode afastar todos os valores  $x_i$  do valor verdadeiro.

Note que nas equações (2) e (3), os desvios dependem inversamente do número de medidas  $N$  e, portanto, tendem a se reduzir quando  $N$  aumenta. Esse comportamento parece indicar que podemos aumentar a precisão do

---

<sup>3</sup> Se o intervalo considerado for  $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$ , a probabilidade é de 95,5% e se for  $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$ , é de 99,7%. Portanto, se um valor  $x_i$  estiver fora da faixa de  $\pm 3\sigma$ , é extremamente provável que, durante essa medida, tenha acontecido um erro grosseiro ou sistemático. Nesse caso, é lícito excluir o dado do conjunto.

experimento sem limites, simplesmente repetindo as medidas, o que é falso. Temos de lembrar que a precisão da medida está limitada pela precisão dos próprios instrumentos. Então, quando o valor calculado para  $\sigma$ , ou para  $\Delta$ , é menor que a precisão  $D$  do instrumento, a incerteza será dada pelo próprio valor  $D$ :

$$\bar{x} \pm D \tag{6}$$



## Anexo 2: Propagação de incertezas

Seja  $z$  uma grandeza física que depende de outras grandezas medidas com incerteza:  $x \pm \Delta x$ ,  $y \pm \Delta y$ , ..., relacionada através da função  $z = f(x, y, \dots)$ . A incerteza  $\Delta z$  propagada para a grandeza  $z$  é:

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \dots \quad (1)$$

Aplicando a equação (1) para funções simples, obtêm-se os resultados de  $z \pm \Delta z$  mostrados na tabela embaixo.

	$z = f(x, y)$	$\Delta z$
Soma	$z = x + y$	$\Delta x + \Delta y$
Subtração	$z = x - y$	$\Delta x + \Delta y$
Produto	$z = xy$	$x\Delta y + y\Delta x$
Produto por uma constante	$z = ax$	$a\Delta x$
Potência	$z = x^n$	$nx^{n-1}\Delta x$
Divisão	$z = \frac{x}{y}$	$\frac{x\Delta y + y\Delta x}{y^2}$
Cosseno	$z = \cos(x)$	$\text{sen}(x)\Delta x$
Seno	$z = \text{sen}(x)$	$\cos(x)\Delta x$
Logaritmo de base $c$	$z = \log_c(x)$	$\frac{\log_c(e)}{x}\Delta x$
Exponencial	$z = c^x$	$c^x \ln(c) \Delta x$



## **Anexo 3: Expressões para o método dos mínimos quadrados**

Seja um conjunto de  $N$  pares de dados experimentais  $(x_i; y_i)$ , no qual os valores  $x_i$  são atribuídos à variável independente e  $y_i$  à variável dependente. Supondo que a relação  $y(x)$  seja considerada linear, ou seja,  $y = ax + b$ , o método de mínimos quadrados fornece os valores para a inclinação  $a$  e o termo linear  $b$  para a reta que melhor se aproxima dos dados experimentais. As expressões dos coeficientes da reta e suas respectivas incertezas são:

$$a = \frac{N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad (1)$$

$$\Delta a = \sqrt{\frac{N}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}} \Delta y = \frac{\Delta y}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \quad (2)$$

$$b = \frac{(\sum y_i)(\sum x_i^2) - (\sum x_i y_i)(\sum x_i)}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} = \bar{y} - a\bar{x} \quad (3)$$

$$\Delta b = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}} \Delta y = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N \sum (x_i - \bar{x})^2}} \Delta y \quad (4)$$

sendo  $\Delta y$  o desvio padrão do ajuste:

$$\Delta y = \sqrt{\frac{\sum (ax_i + b - y_i)^2}{N-2}} \quad (5)$$

e as quantidades  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , as respectivas médias dos conjuntos de dados  $x_i$  e  $y_i$ :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \text{ e } \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} \quad (6)$$